CORSO ELEMENTARE

DI

MATEMATICHE

INTRODUZIONE

AL CALCOLO

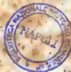
PARTE GEOMETRICA

Del Sig. Bourdon.

TOMO QUINTO.







NAPOLI
PRESSO BOREL E COMP.
1827.

PREFAZIONE

La traduzione della Geometria analitica del sig. Bourdon, che forma questo V. volume, che non abbisogna di encomii, giustifica la scelta in prevenzione da noi fatta della Geometria elementare del Professor Giamboni per 2° volume del nostro Corso.

Infatti, se in allora adottata si fosse una qualunque Geometria sintetica, saremmo adesso nella necessità di avvicinarla alla continuazione che siamo per darle: intrapresa che lascierebbe sempre vedere l' unione di parti che mal si accordano.

Ha, egli è vero, la Geometria i suoi proprii principj, ove l' Algebra non trova luogo. Ma il Prof. Giamboni li premette e ne rispetta l'indispensabilità.

Sarebbe però stato contrario allo scopo di dare un Corso di Matematiche, piuttosto che quello di una semplice Geometria, lo staccare questo ramo dal tronco per darle un'esistenza limitata, e non procurare invece che l'influsso dell' Algebra lo rendesse capace di que' frutti che è al caso di produrre finchè si unisce alla pianta che le dà vita.

La Geometria elementare diviene così una diramazione dell'Algebra, e la Geometria analitica altro non si rende che un' ulteriore sviluppo della diramazione medesima.

Non è infatti vero che le nozioni più elementari di Geometria, quali sono, a cagion di esempio, quelle del triangolo rettangolo, conducono alla equazione del cerchio, e che questa analizzata e costrutta, coma fassi dall'Autore da noi prescelto (tom. 2.° pag. 67. ec.) fanno presentire il passaggio alla così detta *Geometria a due coordinate* che forma parte del volume attuale?

Si supponga che con Euclide (1), o con altri seguaci del di lui metodo, conchiuse si fossero le verità medesime; qual relazione allora fra queste e la Geometria di posizione? Convien dirlo: *le parti non debbono distinguersi le une dalle altre nella formazione di un tutto per differenza di metodo, ma per diversità di materie.*

Ne qui s' intenda da taluno che vogliam noi affidare all'oracolo del calcolo la nostra persuasione. Sarebbe questo, il più delle volte, un rinunziare al carattere distintivo delle Matematiche qual si è l'evidenza. Il calcolo ha i suoi principj, e questi evidenti. Siffatti principii però, applicati che vengano a talune questioni, se ritengono la certezza, perdono però nelle loro

(1) « Euclide, invece d'incominciare dalle cose più semplici e più generali per passare alle più composte e più particolari, come è richiesto dall' ordine, confonde tutto, trattando promiscuamente le linee e le superfici, i triangoli ed i quadrati, e provando con le figure le proprietà delle linee ». (Nicole. *Arte di pensare* parte IV, cap. IX.)

combinazioni la primitiva evidenza. Quindi, a conservargli una siffatta prerogativa, si rende necessario il ragionare acconciamente ad ogni passo che fassi nell' usare di siffatti principj ad oggetto che ogni conseguenza si mantenga evidente al pari dei principj che la producono: nel che, propriamente parlando, consiste ciò che dicesi *metafisica del calcolo*.

Se le diverse parti del nostro Corso formino quel tutto continuato che non si sarebbe potuto ottenere con altra scelta; se la Geometria sintetica nulla abbia perduto della sua evidenza sotto il dominio di un calcolo regolato dalla metafisica, sarà di chi legge il deciderlo.

CORSO ELEMENTARE

DI

MATEMATICHE.

GEOMETRIA ANALITICA

A DUE DIMENSIONI



CAPITOLO I.

Dei punti, della linea retta e del cerchio.

1. I metodi geometrici già esposti nel 2° e nel 3° tomo, per sottoporre ai calcoli e algebrici e aritmetici tanto gli angoli che le rette, hanno avuto in vista, generalmente parlando, la risoluzione delle *equazioni determinate*, che non ammettono per l'incognita che un certo numero di valori.

Ma la risoluzione della equazione $y^2 = a^2 - x^2$ (t° 2° p. 67), dipendente da due variabili indeterminate y ed x, ci ha dato luogo a fissare quella infinità di punti che rappresentano la curva circolare, e ci ha abilitati fino da allora ad interpretare, coll' ajuto dell' Algebra, i valori geometrici delle incognite nelle *equazioni indeterminate* alle quali possiamo esser condotti dai quesiti geometrici riguardati nella loro generalità, e capaci di un' infinità di risoluzioni.

Se qui richiameremo quanto si trova esposto nel citato t° 2° p. 67, . . . ove dopo che dal cerchio dato si dedusse la sua equazione $y^2=a^2-x^2$, e

viceversa per mezzo di questa potè da noi rintracciarsi la corrispondente curva circolare, potremo scorgere fin da adesso che il metodo che costituisce la GEOMETRIA INDETERMINATA conosciuta sotto il nome di *analisi di Cartesio* (Filosofo illustre che ne presentò l' idea primitiva) consiste nell' *esprimere con le equazioni la posizione rispettiva dei punti e delle linee rette o curve costituenti la figura di un quesito proposto, e poi nel combinare queste equazioni in modo da soddisfare allo scopo indicato dalla enunciazione del quesito.*

Lo sviluppo dei principj di questo metodo costituisce la *Geometria analitica* come vien riguardata al presente. Questa si divide in due parti distinte: Geometria analitica *a due dimensioni*, e Geometria analitica *a tre dimensioni*, secondochè gli oggetti, che si prendono a considerare, o sono situati nel medesimo piano, ovvero in un modo qualunque nello spazio.

In questo capitolo non si tratterà che dei punti, delle linee rette e dei cerchj posti sopra un medesimo piano.

PRINCIPJ GENERALI.

§. 1. *Maniera di fissare la posizione di un punto sopra di un piano.*

2. Per poco che si rifletta sulla natura di un problema di Geometria, si scorge che la maggior parte di essi si raggira, in ultima analisi, nel rintracciare la distanza di uno o di più punti incogniti da altri punti noti o da rette di posizione già determinata.

Se dunque potremo con qualche mezzo fissare *analiticamente* la posizione di un punto rapporto ad altri punti o a linee di posizione cognita, saremo al caso di risolvere questa sorte di quesiti geometrici.

3. Siano due rette normali fra loro AX, AY (*fig.* 1), di posizione data, sopra un piano, e sia M un qualunque punto, la di cui posizione sopra di questo piano debba determinarsi.

Dalle normali MP, MQ, calate da un tal punto M, verrà questo fissato qualora si conoscano le lunghezze degli altri due lati contigui AP, AQ del rettangolo APMQ; poichè questi lati AP, AQ esprimono le distanze del punto M dalle due linee fisse AX ed AY. Dunque se da queste rispettive distanze si condurranno le PM e QM parallele alle rette AY ed AX, il punto d'intersecazione di queste due parallele sarà il punto richiesto.

Alle due rette fisse AX ed AY si è dato, per convenzione, il nome di *Assi*.

La distanza AP o QM del punto M dall'asse AY si denomina l'*ascissa* di questo punto, e s'indica algebricamente con x. E la distanza AQ o PM dello stesso punto M dall' asse AX è l' *ordinata* di questo punto, e si esprime con y.

A queste due distanze si dà il nome di *coordinate* di questo punto.

Per distinguere i due assi l'uno dall'altro, si denomina *asse delle ascisse* o delle x la linea AX sulla quale si valutano le ascisse; mentre si dà il titolo di *asse delle ordinate* o delle y alla retta AY sulla quale si valutano le ordinate.

Finalmente il punto A dicesi l'*origine delle coordinate*, perchè si parte da un tal punto per valutare queste distanze.

4. *Equazioni di un punto.* Il carattere di qualunque punto, situato sull'asse delle y, è l'equazione $x=o$, perchè appunto da questa si esprime la nullità della distanza fra il punto e l'asse delle y.

Così, il carattere di qualunque punto, situato sull'asse delle x, è l' equazione $y=o$.

Dunque, il sistema di due equazioni

$$x=o \qquad y=o$$

caratterizza il punto d'origine A delle coordinate, perchè tali equazioni non hanno luogo simultaneamente che per questo punto.

In generale, la coesistenza delle due equazioni

$$x=a, \quad y=b$$

caratterizza un punto posto nella distanza a dall'asse delle y, e nella distanza b dall'asse delle x: Infatti, la prima appartiene a tutti i punti di una parallela ad AY, condotta da una distanza AP$=a$; e la seconda, a tutti i punti di una parallela ad AX condotta da una distanza AQ$=b$. Dunque il sistema delle due equazioni appartiene al punto d'intersecazione M, e non appartiene che ad esso. Queste due equazioni ne sono, per dir così, l'espressione analitica.

Ed è per questa ragione che si chiamano *equazioni del punto*.

5. *Osservazione*. Oltre al valore aritmetico delle due distanze a e b del punto dai due assi, deve ancora aversi riguardo ai loro segni dipendenti dalla posizione che ha il punto nel piano degli assi AX ed AY. Poichè, dai principj stabiliti (t° 2° p. 67, e t° 3° § 57), qualora si convenga di riguardare come *positive* le distanze valutate sopra AX a destra del punto A (fig. 1), come sarebbe AP, devono riguardarsi come *negative* quelle a sinistra, come AP'. Così se abbiansi per positive le AQ valutate sulla retta AY superiormente al punto A, dovranno riguardarsi come negative le distanze sotto un tal punto.

Questo principio riguardante le distanze di un punto fisso dai punti situati e da una parte e dall'altra di una retta, ha luogo egualmente per le distanze dei punti *dalle rette* fisse, come si osservò nel t° 2° p. 67, e nel t° 3° parlando dei *valori correlativi* delle linee trigonometriche.

Posto ciò, se daremo alle quantità a e b i segni

dai quali possono essere affette, avremo i quattro sistemi di equazioni

$$\begin{array}{c|c|c|c} x=+b & x=-a & x=+a & x=-a \\ y=+a & y=+b & y=-b & y=-b \end{array}$$

che caratterizzano le quattro posizioni essenzialmente differenti del punto, cioè M, M', M'', M'''.

Risulterà da questa osservazione:

1.° Che il punto che ha per equazioni $x=+1$, $y=-3$ è situato nell'angolo Y'AX (fig. 2) alla distanza AP=1 dall'asse delle y, e alla distanza PM=3 dall'asse delle x:

2.° Che il punto espresso da $x=0$, $y=-2$, è (§ 4.) situato sull'asse AY alla distanza AM'=2 (fig. 3):

3.° Che il punto caratterizzato da $x=-1$, $y=0$, è posto sopra l'asse AX a sinistra di A nella distanza AM=1.

6. Fin qui gli assi si sono supposti *perpendicolari fra loro*, perchè questa posizione è più semplice e più uniforme all'uso.

Tuttavia vi sono de' quesiti la di cui risoluzione esige che si riguardino gli assi sotto un qualunque angolo. In questo caso le coordinate non sono più perpendicolari agli assi ma parallele, cioè le distanze AP o QM, AQ o PM si valutano (fig. 4) parallelamente agli assi AY, AX.

E tutto ciò che si è detto degli assi rettangolari si applica egualmente al caso in cui siano obliqui.

7. Completiamo adesso la teoria del punto, proponendoci di *rinvenire l'espressione analitica della distanza fra due punti dati sopra un piano*: quesito di un'uso continuo nella Geometria analitica.

Siano x', y' le coordinate di un primo punto M; ed x'', y'' le coordinate di un secondo punto M'; cosichè si abbiano

$$\begin{array}{c} x=x' \\ y=y' \end{array} \quad \text{ed} \quad \begin{array}{c} x=x'', \\ y=y'', \end{array}$$

per le equazioni di questi punti che si suppongono di posizione cognita.

Debba esprimersi la distanza MM′ (fig. 5), che chiameremo D, in funzione delle coordinate note x', y'; x'' y''.

Per tale oggetto, caliamo da questi due punti le ordinate MP, M′P′, e conduciamo M′R parallela ad AX.

Il triangolo rettangolo MRM′ ci dà

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{M'R}^2.$$

Ma $MR = MP - RP = y' - y''$,

$M'R = P'P = x' - x''$. Dunque

$\overline{MM'}^2$ o $D^2 = (y' - y'')^2 + (x' - x'')^2$; e perciò

$$D = \sqrt{[(y' - y'')^2 + (x' - x'')^2]}.$$

Questa formola generale include anche il caso in cui i due punti fossero situati in *senso contrario* riguardo ad uno degli assi, bastando introdurvi i cangiamenti di segno corrispondenti ai cangiamenti di posizione.

Così, per esempio, per ottenere la distanza di due punti, uno de' quali, M, è situato nell' angolo YAX, e l' altro, M′, si trova nell' angolo YAX′ (fig. 6), conviene cambiare il segno di x'' per avere

$$D = \sqrt{[(y' - y'')^2 + (x' + x'')^2]};$$

poichè la nuova figura ci dà $\overline{MM'}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{M'R}^2$; $MR = y' - y''$, $M'R = AP + AP' = x' + x''$. Dunque $D = \sqrt{[(y' - y'')^2 + (x' + x'')^2]}$.

Se uno dei due punti dati, per es. M′, fosse l' origine delle coordinate, essendo allora $x'' = o$ ed $y'' = o$, la formola diviene

$$D = \sqrt{(y'^2 + x'^2)}.$$

Infatti il triangolo AMP (fig. 6) ci dà

$$\overline{AM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{AP}^2.$$

8. L' obliquità degli assi fa diversificare la formola. Infatti, dal triangolo obliquangolo (fig. 7) MM'R risultando, per la formola trigonometrica (t° 3° § 130),

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{M'R}^2 - 2MR \times M'R. \cos MRM' ;$$

avendosi anche qui $MR = y' - y''$, $M'R = x' - x''$, ed osservando che $\cos MRM' = -\cos MRK = -\cos \beta$ (indicando con β l' angolo formato dai due assi, cui è eguale l' angolo MRK); avremo

$$D^2 = (y' - y'')^2 + (x' - x'')^2 + 2(y' - y'')(x' - x'') \cos \beta.$$

$$\text{onde} D = \sqrt{[(y' - y'')^2 + (x' - x'')^2 + 2(y' - y'')(x' - x'') \cos \beta]}.$$

Da questo valore di D, molto più complicato del precedente, rilevasi la necessità di supporre gli assi rettangolari quando debba entrare nei calcoli la distanza fra due punti dati, e sia altronde arbitraria la scelta degli assi.

§ 2. *Maniera di fissare analiticamente la posizione di una retta.*

9. In un piano venga situata ad arbitrio una retta indefinita L'BL. In questo piano prendiamo due assi rettangolari o obliqui AX, AY (fig. 8 e 9) rapporto ai quali sia situata la retta comunque.

Da diversi de' suoi punti come M, M', M'', ... guidiamo le ordinate MP, M'P', M''P'', ..., e per il punto B, ove la retta incontra l' asse delle y, guidiamo BH parallela ad AX.

Ciò effettuato, dai triangoli simili BQM, BQ'M', BQ''M'', ..., avremo una serie di rapporti eguali.

$$\frac{MQ}{BQ}=\frac{M'Q'}{BQ'}=\frac{M''Q''}{BQ''}=\ldots\ldots, \text{ ovvero },$$

$$\frac{MP-AB}{AP}=\frac{M'P'-AB}{AP'}=\frac{M''P''-AB}{AP''}=\ldots\ldots,$$

dai quali rilevasi che *la differenza fra l' ordinata di un qualunque punto della retta e l' ordinata che passa per l' origine sta all' ascissa del punto corrispondente in un rapporto costante.*

E perciò, rappresentando con x ed y le coordinate di un punto preso ad arbitrio sulla retta, con b la distanza AB (chiamata *ordinata all'origine*), e con a il rapporto costante ora fissato; avremo

$$\frac{y-b}{x}=a, \quad \text{cioè} \quad y=ax+b \ \ldots\ldots (1)$$

per relazione che competerà a tutti i punti della retta L'BL, ad esclusione di qualunque altro punto. Infatti, da un punto N preso sopra o sotto questa retta avendosi l'ordinata NP maggiore o minore dell' ordinata MP corrispondente alla stessa ascissa, ed il punto M dandoci, per ipotesi,

$$MP = a.AP + b,$$

ne siegue che NP, maggiore o minore di MP, debba essere maggiore o minore di $a.AP+b$; e che perciò dalle coordinate di questo punto N si abbia

$$y \gtrless ax+b.$$

Si vede dunque che la relazione (1) caratterizza tutti i punti della retta, ossia ne è *la rappresentanza analitica.* Infatti con questa equazione (1) potremo rinvenire i differenti punti della retta dando ad x una serie di valori, ossia portando le ascisse da A in P, P', P'', ..., e poi, guidando per i punti P, P', P'', ... tante parallele ad AY, basterà prendere sopra queste parallele le

parti PM, P'M', P''M'', ... , eguali ai rispettivi valori di y dipendenti dalla equazione (1) da cui risultano; e con ciò avremo un sistema di punti M, M'. M'', che sono quelli della nostra retta.

Di qui è che la relazione (1) vien chiamata *equazione* della retta L'BL.

Le quantità x ed y, che esprimono le coordinate dei differenti punti della retta, sono le *variabili*; e le quantità a e b, che non cangiano per una stessa retta, si chiamano le *costanti* di questa equazione.

10. Il rapporto a è suscettibile di due significati diversi, secondo che gli assi sono rettangolari o obliqui,

1.° Se gli assi sono rettangolari, il triangolo rettangolo MBQ (fig. 8) ci dà (t° 3° § 125)

$$\frac{MQ}{BQ} \text{ o } a=\frac{\text{tang } MBQ}{r};$$

chiamando α l' ang MBQ = ang LCX, e supponendo, per maggior semplicità, il raggio delle tavole = 1, ne risulta

$$a = \text{tang } \alpha$$

cosichè, il rapporto costante a è *eguale alla tangente trigonometrica dell'angolo formato dalla retta con l' asse delle* x.

2.° Quando gli assi siano obliqui, avremo, dal fissato principio (t° 3° § 129) relativo ai triangoli obliquangoli (fig. 9)

$$\frac{MQ}{BQ} \text{ o } a=\frac{\text{sen } MBQ}{\text{sen } BMQ}=\frac{\text{sen } MBQ}{\text{sen } LBY},$$

ovvero, indicando con β l' ang. YAX, cosichè LBY=$\beta-\alpha$,

$$a=\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } (\beta-\alpha)};$$

e perciò, in questo caso, il rapporto costante è *eguale a quello dei seni dei due angoli che forma la retta con gli assi delle* x *e delle* y.

Quest' ultimo valore si riduce al precedente, quando si supponga $\beta=100^\circ$; poichè abbiamo

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen }(100^\circ-\alpha)}=\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}=\text{tang } \alpha.$$

Discussione della equazione.

$$y=ax+b$$

11. Supporremo qui gli assi ad angolo retto, perchè è il caso più comune.

Le costanti a e b benchè siano fisse e determinate per tutti i punti di una stessa retta, possono tuttavia, attesa la loro natura, passare per tutti i stati di grandezza tanto *positivi* che *negativi*, poichè la prima è una tangente trigonometrica, e la seconda esprime la distanza dal punto fisso A ad un punto situato sulla linea AY. Questi diversi stati di grandezza dipendono dalla posizione che può avere la retta data rapporto agli assi. Esaminiamo queste circostanze diverse.

12. *Primieramente* consideriamo il caso in cui *la retta passi per l' origine.*

In questo caso, in cui $b=o$ (fig. 10), l' equazione divenendo

$$y=ax\text{, ed }\frac{x}{y}=a\text{,}$$

ci dimostra che *l'ordinata di un qualunque punto della retta sta alla sua ascissa in un rapporto costante.*

Questa proprietà caratterizza tutte le rette che passano per l' origine; poichè, questo punto trovandosi sopra ciascuna di esse, le sue coordinate ($x=o$, $y=o$) devono verificare la loro equazione;

e perciò appunto si richiede la mancanza del termine indipendente da x ed y in questa equazione.

Muovasi ora la retta attorno all' origine per vedere cosa divenga per questo movimento la a.

Da principio, se la retta giace sopra AX, l'angolo α è *nullo*, ed abbiamo tang α o $a=o$, ciò che riduce l' equazione ad $y=o$, che è appunto quella dell' asse delle x (§. 4).

Finchè la retta, girando sopra l' asse delle x, sarà situata nell' angolo YAX, l' angolo α sarà minore di 100°, e la tang α o a sarà *positiva*, ma aumenterà sempre più. È poi evidente, dall'equazione $y=ax$, che alle ascisse positive AP, o negative AP', corrisponderanno le ordinate MP, M'P' con segni corrispondenti alle ascisse. Quando poi la retta giungerà a confondersi con AY, dandoci allora $\alpha=100°$, ne risulterà $a=\infty$ ed $\frac{1}{a}=o$, e potremo concludere che l' equazione, capace della forma $x=\frac{1}{a}.y$, si riduce ad $x=o$, che è in realtà l' equazione dell' asse delle y (§. 4).

Supponiamo adesso che vada la retta a situarsi nell' interno dell' angolo YAX', come la L''A L'''; l' angolo α è ottuso, e perciò la tang α o a divien *negativa*, e diminuisce aritmeticamente di più in più a misura che si avvicina la retta ad AX'; e, col porre in evidenza il segno di a, abbiamo per l' equazione della retta L''AL'''

$$y=-ax\ ;$$

dalla quale si vede che alle ascisse *positive* AP'' corrispondono le ordinate *negative* P'''M'''; ed alle ascisse *negative* AP'' corrispondono le ordinate positive P''M''; risultato concorde con la figura.

N. B. Quando gli assi sono obliqui, il cangiamento di segno di a corrisponde al caso in cui l'angolo α o L'AX (fig. 11) diviene maggiore dell'angolo β dei due assi. Infatti, nella espressione

$a=\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } (\beta-\alpha)}$, il denominatore sen $(\beta-\alpha)$, quando $\alpha>\beta$, si cangia in $-$ sen $(\alpha-\delta)$, e si trova

$$y=-\frac{\text{sen } \alpha}{(\text{sen } \beta-\alpha)}.x.$$

Ripreso il nostro soggetto per seguire la retta (fig. 10) che, continuando il suo giro, va a giacere sopra AX', vedremo che la tang α torna ad esser *nulla*, e che l'equazione si riduce ad $y=o$, o all' equazione dell' asse delle x.

Passando la retta nell'angolo X'AY', ci dà $\alpha>200°$, ma $<300°$; dunque (1° 3° §. 91) la tang α o a è positiva, e l'equazione torna ad essere $y=ax$. Infatti, essendo prolungata la retta sotto l'asse delle x, riprende le posizioni prese da principio nell' angolo YAX.

Finalmente, quando la retta passa nell' angolo Y'AX, nel qual caso è $\alpha>300°$, ma $<400°$, la tangente α o a ritorna negativa, e si riproduce l' equazione $y=-ax$.

13. Consideriamo, *in secondo luogo*, il caso in cui la retta passa per un punto B (fig. 12) dell'asse delle y situato *sopra l' origine*.

In questo caso, *l' ordinata all' origine*, o b, è positiva, e si ha l' equazione, $y=ax+b$.

Ma se la b è essenzialmente positiva, non può dirsi lo stesso di a. Perchè dal concepire che la retta giri attorno al punto B, e che perciò necessariamente passi per le posizioni parallele a tutte quelle che già prese aveva attorno all' origine, ne siegue che a sarà *positiva* o *negativa* nelle stesse circostanze. Cosichè l' equazione $y=a\,x+b$ con-

viene a tutte le rette come LBL' che formano con l'asse delle x un'angolo minore di 100° o maggiore di 200°, ma minore di 300°; e l'equazione $y=-ax+b$ conviene a tutte le rette, come L''BL''', che formano con l'asse delle x un'angolo maggiore di 100° e minore di 200°, o maggiore di 300° ma minore di 400°.

In *terzo luogo*; quando la retta viene assoggettata a passare per un punto B' situato *sotto l'origine*, allora b è negativa, e l'equazione diviene

$y=+ax-b$ per tutte le rette come L'B'L

ed $y=-ax-b$ per tutte le rette come L''B'L'''.

14. Esaminiamo, come casi particolari, quelli in cui la retta diviene parallela a ciascuno dei due assi.

1.° Quando la retta è parallela all'asse delle x, abbiamo evidentemente tang α, o $a=o$, e b è positiva o negativa, cosichè l'equazione si riduce a

$$y=\pm b,$$

risultato concorde a quanto si è detto (4).

2.° Se la retta è parallela all'asse delle y, la tang α dev'essere infinita e della forma ∞. Deve qui dirsi lo stesso di b, che esprime la distanza, dall'origine fino al punto ove la retta incontra l'asse delle y, distanza che diviene necessariamente *maggiore di qualunque quantità data* nel caso di cui si tratta.

Queste due condizioni introdotte nella $y=ax+b$

cui può darsi la forma $$x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a},$$

la riducono ad $x=-\frac{\infty}{\infty}$.

Per interpretare questo risultato, osserviamo che, per ottenere la retta in tutte le possibili situazioni rapporto agli assi, abbiamo supposto (§ 13) che

essa giri attorno al punto B, riguardato, come fisso. In questa ipotesi, b ha un valore finito e determinato, ed è impossibile di dedurne il caso in cui la retta divenga parallela ad AY.

(Si trova soltanto, nella supposizione di $a=\infty$, $x=o$; cioè l' equazione dell' asse delle y). Se si vuò ottenere il caso particolare di cui si tratta, convien cambiare il *centro di movimento* della retta e prendere, per esempio, il punto C, ove la retta incontra l' asse delle x. Allora rappresentando con c la distanza AC, abbiamo evidentemente

$$(\text{t}^{\circ}\ 3^{\circ}\ \S\ 125)\ \frac{AB}{AC}=\text{tang}\ \alpha,\ \text{o}\ \frac{b}{c}=a;$$

onde $c=\frac{b}{a}$, e l' equazione diviene

$$x=\frac{1}{a}y-c.$$

Se adesso supporremo che la retta, girando intorno al punto C, divenga parallela ad AY, la tang α o a diverrà *infinita*, e c non varierà.

Dunque l' equazione, che si riduce ad $x=-c$, esprime in realtà (§ 4) una parallela all' asse delle y.

Il segno di $-c$ dipende dalla posizione del punto C rapporto all' origine A; punto che può essere in C o C'.

L' espressione di c, o $\frac{b}{a}$, offre l' esempio di una frazione che resta *costante*, benchè i suoi due termini divengano *infiniti*; e ci fà conoscere che una frazione $\frac{a}{b}$ (che si riduce a $\frac{o}{o}$, quando si supponga $a=o$, $b=o$) acquista in certi casi un valore finito e determinato. (t° 1° pag. 211, . . .)

15. Osserveremo di passaggio che la relazione $a=\frac{b}{c}$, introdotta nella equazione $y=ax+b$, la riduce alla forma $y=\frac{b}{c}x+b$, onde $cy-bx=bc$, equazione che contiene come *costanti* le distanze dall'origine A ai punti ove la retta incontra gli assi.

Facendosi $x=o$, si trova $y=b$; e queste sono le coordinate del punto B, ove la retta incontra l'asse delle y.

Dal fare $y=o$, si ottiene $x=-c$, e sono queste le coordinate del punto C ove la stessa retta incontra l'asse delle x.

Si rende utile qualche volta l'uso della equazione della retta sotto questa forma, attesa l'omogeneità de' suoi termini.

Questa equazione si addatta anche ai casi in cui gli assi sono *obliqui*; poichè il triangolo BAC da (fig. 9)

$$\frac{\text{sen BCA}}{\text{sen CBA}} \quad \text{o} \quad a=\frac{AB}{AC}=\frac{b}{c}.$$

16. Dalla precedente discussione risulta, che l'equazione $y=ax+b$ comprende implicitamente le equazioni della retta considerata in tutte le situazioni che può prendere rapporto agli assi; bastando sostituire ad a e b i valori corrispondenti a queste situazioni diverse.

Quesiti preliminari relativi alla linea retta.

17. Ogni qual volta sia data la posizione di una retta da quella del punto B ove la retta incontra l'asse delle y, e dall'angolo che essa forma con l'asse delle x, le costanti a e b avranno un valore determinato. Ma possono imporsi ad una retta

altre condizioni, come quelle per esempio, di passare per due punti presi ad arbitrio sopra un piano; di passare per un punto dato in direzione parallela o perpendicolare ad una retta di posizione già cognita; di passare per un punto facendo con un' altra retta un angolo dato; ec.

In questi casi diversi a e b devono riguardarsi come *costanti indeterminate* i di cui valori dipendono dalle condizioni imposte alla retta.

La ricerca di questi valori dà origine ad una serie di quesiti che servono di base alla Geometria analitica. Sviluppiamoli successivamente.

18. 1.° QUESITO. *Trovare l'equazione di una retta che debba passare per due punti dati sopra un piano.*

(Possono gli assi, in questo quesito, essere indifferentemente normali o obliqui).

Siano due punti M, M' (fig. 5 e 7) fissati sopra un piano dalle loro coordinate cognite x', y' ed x'', y''.

L' equazione cercata avrà la forma

$$y=ax+b \quad . \; . \; . \; (1),$$

essendo a e b due costanti (incognite per un'istante) da determinarsi in funzioni di x', y', x'', y''.

Poichè ciascuno dei due punti M ed M' si trova sulla retta, perciò le loro coordinate, sostituite ad x ed y nella equazione (1), dovranno verificarla, e darci le due relazioni

$$\begin{cases} y'=ax'+b \quad . \; . \; . \; . \; (2) \\ y''=ax''+b \quad . \; . \; . \; . \; (3). \end{cases}$$

Da queste due equazioni, che non contengono che due incognite a e b al primo grado, potremo facilmente dedurre i valori di a e b:

1.° Sottraendo la (3) dalla (2) per avere

$$y'-y''=a(x'-x''), \text{ cioè } a=\frac{y'-y''}{x'-x''};$$

2.° Portando questo valore di a nella (2) per trovare

$$b=y'-\frac{y'-y''}{x'-x''}.x=\frac{x'y''-y'x''}{x'-x''} \ldots \quad (4);$$

3.° Sostituendo i valori di a e b nella (1) per ottenere

$$y=\frac{y'-y''}{x'-x''}.x+\frac{x'y''-y'x''}{x'-x''} \ldots \quad (4)$$

per l' equazione richiesta.

Altro metodo. Dalla equazione (1) si sottragga la (2), e si otterrà l' equazione

$$y-y'=a(x-x')$$

che contiene ancora l' incognita a ; ma sottraendo la (3) dalla (2), si ottiene

$$y'-y''=a(x'-x''),\ \text{cioè}\ a=\frac{y'-y''}{x'-x''}.$$

Questo valore, sostituito ad a nell' equazione precedente, ci farà ottenere

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}\,(x-x') \ldots \quad (5),$$

equazione che, non racchiudendo più che le variabili necessarie x ed y e le quantità x', y', x'', y'', conviene ancora alla retta cercata.

L' identità delle equazioni (4) e (5) può stabilirsi facilmente deducendo dalla (5)

$$y=y'+\frac{y'-y''}{x'-y''}.x-\frac{y'-y''}{x'-x''}.x',\ \text{o, riducendo,}$$

$$y=\frac{y'-y''}{x'-x''}.x+\frac{x'y''-y'x''}{x'-x''}.$$

Il secondo metodo, che è certo più semplice ed elegante del primo, ci conduce ad un risultato di

un' uso, in generale, molto più comodo nei calcoli.

Tuttavia l'equazione (4) ha il vantaggio di porre in evidenza la quantità b, o *l'ordinata all'origine.*

19. *Osservazione.* L'equazione $y-y'=a(x-x')$, ottenuta poc' anzi con il secondo metodo, ha molta influenza nella Geometria analitica, ed ha il carattere singolare di rappresentare tutte le rette che passano per il punto particolare (x', y'). Infatti è risultata dalla combinazione dell' equazione generale $y=ax+b$ con la relazione particolare $y'=ax'+b$, che esprime che il punto (x', y') si trova sulla retta.

Inoltre, siccome, facendo $y=y'$, $x=x'$, essa si riduce a $o=o$, si trova con ciò evidentemente che la retta passa per il punto (x', y').

Riguardo poi alla quantità a, che sussiste ancora nella equazione come *costante indeterminata*, il suo valore dipende da una seconda condizione che può imporsi alla retta. Questa condizione, nel precedente quesito, consiste nel far passare la retta per un secondo punto (x'', y''), e con ciò si determina completamente la posizione di questa retta, trovandosi

$$a=\frac{y'-y''}{x'-x''}.$$

20. 2.° QUESITO. *Condurre per un punto dato una parallela ad una retta di posizione cognita.*

Incominciamo dal *fissare analiticamente la condizione* del parallelismo di due rette.

Siano $\begin{cases} y=ax+b \\ y=a'x+b' \end{cases}$ le equazioni delle due rette BL e DH (fig. 13).

Poichè queste rette sono parallele, gli angoli α' ed α che esse fanno con l'asse delle x sono eguali; perciò abbiamo

$$\text{tang}\,\alpha' = \text{tang}\,\alpha, \quad \text{o} \quad a'=a.$$

Questa relazione fra i coefficienti di x, delle due equazioni, è indipendente dalla inclinazione degli assi; poichè, dalla eguaglianza fra gli angoli α' ed α, si deduce necessariamente

$$\frac{\text{sen }\alpha'}{\text{sen }(\beta-\alpha')}=\frac{\text{sen }\alpha}{\text{sen }(\beta-\alpha)}, \quad \text{o} \quad a'=a.$$

La relazione $a'=a$ può anche dimostrarsi con la figura. Siano Y ed y le ordinate MP, NP, delle due rette DH e BL corrispondenti ad una stessa ascissa AP o x; avremo dalle due addotte equazioni

$$Y-y=(a'-a)x+b'-b \; . \; . \; . \; . \; (\text{m})$$

ma, dal parallelismo delle rette, abbiamo

MP—NP, o MN=DB

M'P'—N'P', o M'N'=DB,

. . . .

poichè le parti delle parallele comprese dalle parallele sono eguali. Dunque

$Y-y=b'-b$, quantità costante.

Ora, affinchè questa equazione si accordi con la precedente (m), è necessario che, qualunque sia x, si abbia

$$a'-a=o \; ; \quad \text{cioè} \quad a'=a.$$

Reciprocamente, se avremo $a'=a$, o $a'-a=o$,

risulterà $\quad Y-y=b'-b$, o MN=DB;

dunque le rette DM e BN saranno parallele.

Dunque la relazione $a'=a$ è una condizione caratteristica del parallelismo di due rette.

21. Riprendiamo adesso il proposto problema. Siano x', y' le coordinate del punto M per il quale può condursi una parallela DH ad una retta data BL.

L'equazione della BL essendo

$$y=ax+b \; . \; . \; . \; (1),$$

quella della retta cercata avrà la forma

$$y=a'x+b' \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

ove a' e b' sono due costanti da determinarsi.

Ma la retta DH, passando, per ipotesi, per il punto M, ci da l'equazione particolare

$$y'=a'x'+b' \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Ora, dalla (2) sottraendo la (3), abbiamo

$$y-y'=a'(x-x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{ved. § } 19).$$

E, poichè il parallelismo delle rette ci dà $a'=a$, avremo finalmente

$$y-y'=a(x-x')$$

per l'equazione della retta cercata, che non differisce dalla (1) che riguardo all' ordinata all'origine, che è qui $y'-ax'$.

22. 3.° QUESITO. Date due rette sopra un piano, debba 1° *determinarsi il loro punto d' intersecazione;* 2° *l' angolo che fanno fra loro.*

Siano $\begin{pmatrix} y=ax+b \\ y=a'x+b' \end{pmatrix}$ le equazioni delle due rette BL e DH (fig. 14)

1.° Per ottenere le coordinate del loro punto d'intersecazione, osserveremo che, dovendo il punto trovarsi nel tempo stesso sulle due rette, le sue coordinate AP e PM devono verificare le equazioni di queste rette, perchè queste coordinate non sono che i valori che competono ad x ed y delle due equazioni, per i quali esse simultaneamente coesistono. Perciò, eliminando prima y e poi x fra queste due equazioni, otterremo que' valori delle coordinate che competono al punto di cui si tratta.

Per tale oggetto incominceremo dal sottrarre la 1ª equazione dalla 2ª per ottenere

$$o=(a'-a)x+b'-b\text{, cioè } x=\frac{b-b'}{a'-a}.$$

Da questo valore, portato nella (1), otterremo

$$y=a.\frac{b-b'}{a'-a}+b\text{, o, riducendo, } y=\frac{ba'-ab'}{a'-a}.$$

Dunque, $x=\dfrac{b-b'}{a'-a}$, $y=\dfrac{ba'-ab'}{a'-a}$

sono le coordinate del punto d' intersecazione M.

Sia, come caso particolare, $a'=a$, ne risulta

$$x=\frac{b-b'}{o},\quad y=\frac{a(b-b')}{o},$$

cioè questi valori divengono infiniti; e così dev' essere, perchè allora le due rette sono parallele (§ 20).

Se alla condizione di $a'=a$ vi si aggiunga quella di $b'=b$, si trova

$$x=\frac{o}{o},\quad y=\frac{o}{o},$$ *valori indeterminati.*

Ed infatti, in questo caso, le due rette si confondono, divenendo identiche le due equazioni; dunque le rette s' incontrano in un numero infinito di punti.

I risultati ottenuti per questa prima parte del problema sono veri, qualunque sia l' inclinazione degli assi.

Non è però così della seconda parte.

23. L' angolo delle due rette, che rappresenteremo con V, potrà determinarsi osservando che il triangolo EMG ci dà MGX=EMG+MEG, cioè EMG o V=MGX—MEG=$\alpha'-\alpha$, (indicando α' ed α gli angoli che fanno le due rette con l'asse delle x).

Ma, dall' aver ottenuto (t° 3° § 108)

$$\text{tang}\,(a-b)=\frac{\text{tang}\,a-\text{tan}\,b}{1+\text{tang}\,a\ \text{tang}\,b}\text{, sarà}$$

$$\text{tang}\,(\alpha'-\alpha)\text{, o tang V}=\frac{\text{tang}\,\alpha'-\text{tang}\,\alpha}{1+\text{tang}\,\alpha'\,\text{tang}\,\alpha}\ \ldots(1)$$

Ciò posto, se gli assi sono rettangolari, si ha

$$\text{tang } \alpha' = a', \quad \text{tang } \alpha = a, \text{ onde}$$

$$\text{tang V} = \frac{a' - a}{1 + a'a} \quad \ldots \quad (2)$$

24. Quando gli assi siano obliqui, i valori di tang α', tang α non sono più rappresentati da a' ed a, ma convien dedurli dalle relazioni

$$\frac{\text{sen } \alpha'}{\text{sen } (\beta - \alpha')} = a', \quad \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } (\beta - \alpha)} = a.$$

Ma la 2ª relazione si riduce a

$$\text{sen } \alpha = a . \text{ sen } (\beta - \alpha),$$

o, sviluppando sen $(\beta - \alpha)$ colla formola (1° 3° § 99) che ci dà il sen $(a - b)$,

$$\text{sen } \alpha = a \text{ sen } \beta \cos \alpha - a \text{ sen } \alpha \cos \beta.$$

Col dividere questi due membri per cos α, e trasportare, si avrà il valore di tang α, poichè otterremo

$$\text{tang } \alpha (1 + a \cos \beta) = a \text{ sen } \beta, \text{ cioè tang } \alpha = \frac{a \text{ sen } \beta}{1 + a \cos \beta}.$$

Così si otterrebbe $\quad \text{tang } \alpha' = \dfrac{a' \text{ sen } \beta}{1 + a' \cos \beta}$.

Sostituendo ora questi valori nella (1), avremo

$$\text{tang V} = \frac{\dfrac{a' \text{ sen } \beta}{1 + a' \cos \beta} - \dfrac{a \text{ sen } \beta}{1 + a \cos \beta}}{1 + \dfrac{aa' \text{ sen } \beta}{(1 + a' \cos \beta)(1 + a \cos \beta)}};$$

o, riducendo allo stesso denominatore, simplificando ed osservando che $\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$,

$$\text{tang V} = \frac{(a'-a)\,\text{sen}\,\beta}{1+aa'+(a+a')\cos\beta} \;.\;.\;.\;. \;(3).$$

Supponiamo $\beta=100^\circ$, onde sen $\beta=1$, cos $\beta=0$; la formola si riduce a tang $V=\frac{a'-a}{1+aa'}$, come sopra.

25. Nel caso particolare in cui le due rette *sono perpendicolari fra loro*, essendo $V=100^\circ$, onde tang $V=\infty$, avremo, quando gli assi siano rettangolari, $\frac{a'-a}{1+aa'}=\infty$, o $\frac{1+aa'}{a'-a}=o$, perciò $1+aa'=o$, e quando siano obliqui, $1+aa'+(a+a')\cos\beta=o$.

La relazione $1+aa'=o$, che spesso richiameremo, può dimostrarsi direttamente con la figura (15). Poichè il triangolo EMG è rettangolo in M, i due angoli MEG, MGE sono complementi l' uno dell' altro, ed abbiamo tang MGE = cot MEG = $\frac{1}{\text{tang MEG}}$ (t° 3° § 87). Ma tang MGX, o $a'=-$tang MGE; tang MEG$=a$; dunque

$$a'=-\frac{1}{a}\,,\ \text{ovvero},\ aa'+1=o.$$

26. 4.° QUESITO. Si debba 1.° *da un punto dato condurre una normale ad una retta data*: 2.° *trovare la lunghezza di questa normale*, *ossia la distanza fra il punto dato e la retta data*.

Sia BL (fig. 16) la retta data, e la normale a BL sia MG che deve passare per il punto M, che ha per coordinate x' ed y'.

Supponiamo che l' equazione della retta BL sia

$$y=ax+b \;.\;.\;.\;. \;(1).$$

Poichè la retta MG passa per il punto x', y', la sua equazione (§ 19) avrà la forma

$$y-y'=a'(x-x'),$$

essendo a' una costante indeterminata.

Ma, le due rette dovendo essere normali fra loro, avremo (25) la relazione $1+aa'=0$, onde $a'=-\frac{1}{a}$.

Dunque l'equazione precedente diviene

$$y-y'=-\frac{1}{a}(x-x') \quad . \; . \; . \; . \; (2).$$

Tale è l'equazione della normale MG; che perciò viene ad avere una posizione determinata.

27. Dovremo ora rinvenire l'espressione della distanza dal punto M al punto H ove le due rette s'incontrano.

Conoscendosi già le coordinate x', y' del punto M, se si potessero determinare quelle del punto H, allora basterebbe sostituire queste quattro coordinate nella espressione della distanza fra i due punti dati, formola trovata (§ 7), e così si avrebbe il valore di MH.

Siccome il punto H è il punto d'intersecazione di BL ed MG, converrebbe (§ 22) eliminare x ed y fra le equazioni (1) e (2); ma osservando dalla formola già citata, che non tanto interessa il determinare le coordinate dei due punti M ed H quanto è importante di ottenere le loro differenze; perciò si riduce il quesito ad eliminare fra le (1) e (2) le quantità $x-x'$, $y-y'$ considerate come incognite; ed i valori di queste quantità sostituiti nella espressione

$$D=\sqrt{[(x'-x'')^2+(y'-y'')^2]}$$

in luogo di $x'-x''$, $y'-y''$, ci daranno la distanza richiesta.

Per porre in evidenza queste due incognite nell' equazione (1) come lo sono nella (2), daremo alla (1) la forma

$$y-y'=a(x-y')-y'+ax'+b \dots (3),$$

lo che si effettua coll' aggiungere $-y'$ ai due membri, e col sottrarre ed aggiungere nel secondo membro ax'.

Ciò posto, si sottragga la (1) dalla (3); risulterà

$$o=(a+\frac{1}{a})(x-x')-y'+ax'+b \text{ ; onde}$$

$$x-x'=\frac{y'-ax'-b}{a+\frac{1}{a}}, \text{ o , riducendo ,}$$

$$x-x'=\frac{a(y'-ax'-b)}{a^2+1}.$$

Questo valore, portato nella (2), ci dà

$$y-y'=-\frac{1}{a}\cdot\frac{a(y'-ax'-b)}{a^2+1}=\frac{-(y'-ax'-b)}{a^2+1}.$$

Dal sostituire questi valori di $x-x'$, $y-y'$ in quello di D, rappresentata la normale con N, troveremo

$$N=\frac{\sqrt{[a^2(y'-ax'-b)^2+(y'-ax'-b)^2]}}{(a^2+1)^2}.$$

Riunendo i due fattori del numeratore si avrà sotto il radicale $(a^2+1)(y'-ax'-b)^2$; e sopprimendo il fattore a^2+1 comune ai due termini, e poi estraendo da questa la radice quadrata, otterremo finalmente

$$N=\frac{\pm(y'-ax'-b)}{\sqrt{(a^2+1)}}$$

per la lunghezza della distanza MH.

28. *Discussione*. Per interpretare il doppio segno $\pm$ di questo risultato, tradurremo geometricamente il valore della quantità $y'-ax'-b$, in cui y' rappresenta l'ordinata MP, ed $ax'-b$ esprime similmente l'ordinata NP di BL corrispondente all'ascissa x' o AP (poichè facendo $x=x'$ nella $y=ax+b$, si ha y, o NP$=ax'+b$), dunque $y'-ax'-b$ rappresenta la distanza MN. Ora, questa distanza può essere (t° 3° § 57) *positiva* o *negativa*, cioè $\gtrless o$ secondoche il punto M è situato sopra o sotto BL. Per esempio, se il punto fosse in M', si avrebbe $M'N'=N'P'-M'P'=ax'+b-y'$.

Ma quando si ricerca la distanza del punto M dalla retta BL, si suppone che si voglia il valore positivo; e perciò *se il punto* M *è situato sopra la retta* BL, nel qual caso, $y'-ax'-b$ è $>$ o, si deve avere

$$N=\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{(a^2+1)}};$$

e *se il punto* M *è situato sotto* la retta, essendo $y'-ax'-b<$ o, avremo

$$N=\frac{ax'+b-y'}{\sqrt{(a^2+1)}}.$$

Ciascuno di questi due risultati può ottenersi dalla Geometria. Poichè le MP, MH, respettivamente normali ad AP, BL, ci danno (t° 2° § p. 45) l'ang. NMH=BL'A=α.

Ciò posto, il triangolo NMH ci dà (t° 3° § 126)

$$MH=MN\cos\alpha=\frac{MN}{\sec\alpha}=\frac{MN}{\sqrt{(1+\tan^2\alpha)}}$$

(t° 3° § 87). Ma $MN=MP-NP=y'-ax'-b$, tang $\alpha=a$; dunque

$$MH,\ \text{o}\ N=\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{(a^2+1)}}.$$

Se il punto M fossse sotto BL, si avrebbe

$$M'N'=ax'+b-y', \text{ onde } N=\frac{ax'+b-y'}{\sqrt{(a^2+1)}}.$$

29. Esaminiamo alcuni casi particolari.

1.° Si supponga (fig. 17) che il punto, da cui vuò calarsi la normale, sia l'origine delle coordinate. Avremo, in tal caso, $x'=o$, $y'=o$, e l'espressione diviene

$$N=\frac{\mp b}{\sqrt{(a^2+1)}},$$

risultato *positivo* o *negativo*, secondo che il punto B è posto sopra o sotto l' origine.

2.° Suppongasi che la retta BL (fig. 18) passi per l' origine. Allora sarà $b=o$, e l' espressione si ridurrà ad

$$N=\frac{y'-ax'}{\sqrt{(a^2+1)}}, \quad \text{o} \quad N=\frac{ax'-y'}{\sqrt{(a^2+1)}}.$$

30. *N. B.* Se gli assi, supposti normali nel precedente quesito, fossero obliqui, converrebbe, per la prima parte, far uso della relazione (§ 5) $1+aa'+(a+a')\cos\beta=o$, che ci darebbe

$$a'=-\frac{(1+a\cos\beta)}{a+\cos\beta};$$

valore da sostituirsi nella $y-y'=a'(x-x')$.

Riguardo alla seconda parte, dopo di avere effettuata l' eliminazione di $x-x'$, $y-y'$, fra le equazioni delle due rette, convien portare questi valori nella espressione generale di D (§ 8), per trovare, a calcolo effettuato

$$N=\frac{(y-ax'-b)\,\text{sen}\,\beta}{\sqrt{(a^2+2a\cos\beta+1)}}.$$

31. 3.° QUESITO. *Per un punto dato fuori di una retta condurne un'altra che formi con la prima un angolo dato.*

Siano x', y' le coordinate del punto, ed m la tangente dell'angolo dato. Essendo l'equazione della prima retta $y=ax+b$, quella della seconda retta avrà la forma (§ 19) $y-y'=a'(x-x')$. Queste rette dovendo formare un' angolo che abbia per tangente m, dovrà aversi (§ 23)

$$\frac{a'-a}{1+aa'}=m, \text{ ovvero, } \frac{a-a'}{1+aa'}=m.$$

(Ambedue queste quantità sono addattate per esprimere la tangente dell' angolo dato).

Le precedenti relazioni, comprese dalla sola

$$\frac{a'-a}{1+aa'}=\pm m, \text{ onde } a'=\frac{a\pm m}{1\mp am},$$

ci danno per l' equazione della retta cercata

$$y-y'=\frac{a\pm m}{1\mp am}(x-x').$$

Il quesito ammette dunque due soluzioni; il che è evidente, potendosi da una parte e dall'altra della normale, calata dal punto dato sopra la retta $y=ax+b$, condurre due rette che facciano con questa l'angolo dato.

Se fosse quest' angolo=100°, nel qual qual caso $m=\infty$, ne risulterebbe

$$\frac{a\pm m}{1\mp am}, \text{ o } \frac{\frac{a}{m}\pm 1}{\frac{1}{m}\mp a}=-\frac{1}{a}; \text{ onde}$$

$y-y'=-\frac{1}{a}(x-x')$, equazione ottenuta (§ 26).

32. *Osservazioni generali.* I diversi quesiti da noi risoluti si riprodurranno continuamente in tutto il corso della Geometria analitica. Ma, riflettendo sui risultati ai quali ci ha condotto la loro risoluzione si comprende: 1.° Che l' *eliminazione* rac-

chiude quasi tutto lo spirito dell' analisi geometrica:

2.° La necessità di evitare, quando si possa, il sistema degli assi obliqui, affinchè i calcoli si rendano più semplici. Tuttavia conviene eccettuarne i casi in cui deve aversi in considerazione o l'equazione di una retta che passa per due punti dati, o la condizione del parallelismo di due rette, risultati che sono indipendenti dall' inclinazione degli assi.

Maniera di fissare analiticamente la posizione di un cerchio sopra un piano.

33. Sia un cerchio di qualunque raggio r, con il centro in O. Condotti sul suo piano due assi rettangolari AX, AY (fig. 19), proponiamoci di fissarne la posizione rapporto a questi assi.

Indicando con p, q, le coordinate AB, OB, del centro, e con x, y, le coordinate AP, MP, di un qualunque punto M della circonferenza, avremo, per la formola del n.° 7,

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Questa relazione caratterizza tutti i punti della circonferenza, perchè essa è evidentemente soddisfatta dalle coordinate di ciascuno de' suoi punti, mentre non può esserlo da altri.

Infatti, sia N un qualunque punto preso fuori o dentro la circonferenza; rappresentando sempre con x ed y le coordinate di questo punto; si avrebbe

$$(x-p)^2+(y-q)^2$$

per il quadrado della distanza ON; ma è evidente essere ON>, o <OM, secondo che il punto è fuori o dentro la circonferenza; onde risulterà necessariamente

$$(x-p)^2+(y-q)^2>, \text{ o } <r^2.$$

Perciò l' equazione (1) non può essere verificata da un punto che sia fuori della circonferenza.

Dunque la (1) è l' *equazione del cerchio*, perchè fissa completamente la posizione di ciascun punto della circonferenza.

Le coordinate del centro, ed il raggio sono *le costanti* che vi hanno luogo; ed infatti un cerchio è completamente determinato da questi dati.

34. L' equazione è assai più complicata quando gli assi sono obliqui (fig. 20); poichè, attesa la formola del n.° 8, abbiamo

$$(x-p)^2+(y-q)^2+2(x-p)(y-q)\cos\beta=r^2,$$

(rappresentando β l' angolo dei due assi).

35. L'equazione (1) prende una forma più o meno semplice secondo le diverse posizioni del cerchio rapporto agli assi.

1.° L'origine può trovarsi in un punto A' (fig. 19) della circonferenza.

In questo caso fra p, q, r, avremo, evidentemente, la relazione

$$p^2+q^2=r^2;$$

ma, sviluppando l' equazione (1), diverrà essa

$$x^2-2px+p^2+y^2-2qy+q^2=r^2;$$

o, togliendo le due quantità eguali p^2+q^2 ed r^2,

$$x^2-2px-2qy+y^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

E questa è la forma, in tal caso, dell'equazione del cerchio. Infatti, supponendo $y=0$ nella (2), risulta l' equazione

$$x^2-2px=0, \quad o \quad x\,(x-2p)=0;$$

onde $x=0$, $x=2p$;

ciò che prova che il punto ($x=0$, $y=0$), o l'origine, si trova situato nella circonferenza.

Osservazione. Siccome all' ipotesi di $y=0$ corri-

sponde ancora l' ascissa $x=2p$, ne siegue che la circonferenza tagli l' asse delle x in un secondo punto C, cosichè A'C sia doppio di $A'D=p$, ciò che dimostra che *la corda A'C è divisa in due parti eguali dalla normale calata dal centro sopra di lei.*

Questa verità, già dimostrata in Geometria (t° 2° § 45), viene ora posta in evidenza per mezzo della equazione del cerchio.

36. 2.° L' origine può collocarsi nell' estremità A'' di un diametro A''G che farebbe da asse delle x. In questa nuova posizione degli assi abbiamo $p=r$, $q=o$;

perciò la (1) diviene $(x-r)^2+y^2=r^2$,

o, riducendo, $y^2=2rx-x^2$ . . . . (3)

L' equazione (3) si deduce ancora dalla (2) facendosi $p=r$, e $q=o$.

Per mezzo della (3) si deducono facilmente due altre proprietà del cerchio, già dimostrate nel t° 2° § 52.

Infatti dando alla (3) la forma $y^2=x.(2r-x)$, e avendosi dalla figura

$$y=MR,\ x=A''R,\ \text{cioè}\ 2r-x=A''G-A''R=GR,$$

conosceremo che *la normale condotta da un punto della circonferenza sopra un diametro, o l' ordinata a questo diametro, è media proporzionale fra i due segmenti.*

La stessa equazione si riduce ad $y^2+x^2=2r.x$; ma se si guida la corda A''M, si ha evidentemente

$$y^2+x^2,\ o\ \overline{MR}^2+\overline{A''R}^2=\overline{A''M}^2,\quad 2r=A''G,\ x=A''R;$$

dunque $\overline{A''M}^2=A''G.\ A''R$, o $A''G:A''M::A''M:A''R$,

cioè *la corda condotta da un' estremità di un diametro è media proporzionale fra questo ed il segmento adjacente formato dalla perpendicolare calata dalla estremità della corda sopra quel diametro.*

37. Finalmente, ponendo nel centro l' origine delle coordinate, ed annullandosi perciò le p e q, l' equazione (1) si riduce ad

$$x^2+y^2=r^2 \quad \ldots \quad (4),$$

che è l'*equazione del cerchio riferita al suo centro come origine*, già dimostrata analiticamente nel t° 2° § 53.

Se gli assi sono obbliqui si ha per equazione

$$x^2+y^2+2xy.\ \cos\beta=r^2.$$

(Si veda il triangolo obliquangolo OMR, fig. 20)

Date le equazioni trovare i luoghi geometrici.

38. Prima di passare alle applicazioni dei principii precedenti, e di far conoscere come, coll' ajuto delle equazioni della linea retta e del cerchio, si giunga a risolvere qualunque quesito relativo a queste linee, faremo alcune osservazioni sulle linee, e sull' uso che può farsene.

Abbiamo già veduto che la posizione di una retta o di un cerchio sopra un piano è fissata per mezzo delle coordinate x ed y di ciascuno de' suoi punti, e di un certo numero di *costanti* la di cui cognizione basta per determinare questa posizione geometricamente.

Supponiamo adesso che, x ed y rappresentando sempre le distanze di un punto da due assi rettangolari o obbliqui, la risoluzione di un quesito ci abbia condotti ad un'equazione della forma $F(x, y)=c$. (Il carattere F vuò dire *funzione di*. Ved. t° 3° § 5).

Volendo fissare la posizione del punto che soddisfi all' esposizione del quesito in modo che le sue coordinate x ed y verifichino l'equazione, otterremo un' infinità di punti, la di cui serie formerà una linea *retta* o *curva*, secondo la natura della equazione.

Infatti, non avendosi che una sola equazione fra x ed y, possiamo disporre ad arbitrio di una di queste due quantità x ed y, (che appunto per ciò diconsi *variabili*), e dall' equazione si otterranno i corrispondenti valori dell' altra variabile.

Diamo, per esempio, all' ascissa x la serie di valori $x=a$, a', a'', a''', a^{iv}, a^{v} . . . .

Se l' equazione non è che di 1.° gr.° in y, si dedurranno successivamente per i valori corrispondenti di questa variabile,

$$y=b,\ b',\ b'',\ b''',\ b^{\text{iv}},\ b^{\text{v}},\ \ldots\ .$$

E portando sopra AX (fig. 21); valori di x, ed innalzando dai punti P, P', P'', P''', ... le perpendicolari, o piuttosto, le parallele ad AY eguali ai valori di y, si otterranno diversi punti M, M', M'', M''', ..., che soddisferanno egualmente al quesito.

E siccome niente c' impedisce di dare ad x valori pochissimo differenti l' uno dall' altro, ne siegue che anche i corrispondenti valori di y debbano pochissimo diversificare fra loro; cosichè possiamo concludere che gli estremi M, M', M'', M''', ... debbano essere così prossimi fra loro da poterli legare insieme con una linea continua. Tutti i punti di questa linea saranno altrettante *soluzioni* del quesito; giacchè i punti supposti intermediarj possono riguardarsi corrispondenti ai valori di x ed y, deducibili dalla stessa equazione del problema, e compresi fra quelli che sono stati già costruiti.

Questa curva sarà tanto più rigorosamente determinata quanto più i punti M, M', M'', ... si approssimeranno gli uni agli altri.

Supponiamo ora che sia l' equazione, rapporto ad y, di un grado superiore al primo. Siccome in questo caso, a ciascun valore di x devono corrispondere *due* o più valori di y (fig. 22), ne sie-

gue che la curva sia composta di due o più rami MM'M'' . . . . , NN'N'' . . . . , RR'R'' , . . .

39. Debba, per esempio costruirsi l'equazione

$$y^2=2x\text{ , cioè }y=\pm\sqrt{2x}.$$

Qui si vede primieramente che ad uno stesso valore di x corrispondono due valori di y (fig. 23) eguali e con segno contrario; in secondo luogo che ai valori negativi di x non corrispondono che valori immaginarj di y, cioè che la curva non può avere alcun punto situato alla sinistra dell'origine ossia della AY.

Ciò posto, facciamo prima $x=0$, ed avremo $y=0$; e conchiuderemo che l'origine delle coordinate appartiene alla curva, o che *la curva passa per l'origine*.

Sia poi $x=1$; ne risulta

$$y=\pm\sqrt{2}=\pm 1,4\ldots,$$

valore prossimo al vero di 0, 1.

Dopo di aver preso sopra AX una distanza AP eguale all'unità lineare, se si conduca per il punto P una parallela ad AY, e si prendano, sopra e sotto di AX due distanze PM, PN eguali ad 1, 4..., si avranno in M ed N due punti della curva richiesta.

Sia ancora $x=2$; onde $y=\pm 2$. Questi valori essendo costruiti come i precedenti, danno in M' ed N' due nuovi punti.

Continuando così a dare ad x differenti valori, e costruendo i valori corrispondenti di y, si otterrà una curva della forma LAH che si estende indefinitamente a destra dell'asse delle y, mentre, finchè x è *positivo*, sono reali i valori di y.

40. Proponiamoci, per 2.° esempio, l'equazione $y^2-x^2=4$, dalla quale si deduce $y=\pm\sqrt{(x^2+4)}$.

Si vede, *primieramente*, che ad uno stesso valore di x corrispondono due valori di y eguali e di

segno contrario; *secondariamente* che, qualunque valore *positivo* o *negativo* venga dato ad x, si otterranno sempre per y valori reali. Dunque, siamo già certi che la curva si estende indefinitamente sopra e sotto dell' asse delle x, a destra ed a sinistra dell' asse delle y.

Facciamo frattanto qualche ipotesi.

Sia primieramente $x=o$, (fig. 24), e si avrà

$$y=\pm\sqrt{4}=\pm 2.$$

Prendiamo sopra AY due distanze AB, AC eguali a 2; i punti B e C appartengono alla curva.

Sia, in secondo luogo,

$$x=1, \text{ onde } y=\pm\sqrt{5}=\pm 2,2\ldots,$$

diverso dal giusto di circa o, 1.

Se si prenda sopra di AX, AP=1, e dal punto P si porti una parallela ad AY, sopra la quale prendendo due parti PM, PN eguali a $2\frac{1}{5}$, avremo in M ed N due nuovi punti della curva.

Sia ancora $x=2$, cioè

$$y=\pm\sqrt{8}=\pm 2,8\ldots \text{ prossimo di } o,\ 1.$$

Se costruiremo questi valori, come i precedenti, si otterranno i due punti M′ ed N′.

E così in seguito, nel senso positivo dell' asse delle x.

Ora, per ottenere i punti situati a sinistra di AY, osserviamo che, siccome ai valori di x positivi o negativi, ma aritmeticamente li stessi, corrispondono, prescindendo dal segno, i medesimi valori di y, perciò basta, dopo di aver prese le distanze Ap, Ap′, ... , eguali ad AP, AP′, ... , di condurre per i punti p, p', ... delle parallele ad AY, e per i punti M, M′, . . . N, N′, . . . delle parallele ad AX. I punti m, m', . . . n, n', . . . , saranno anch' essi punti della curva, che sarà evi-

dentemente composta di due rami distinti ed opposti LBL', HCH'.

Bastano questi esempj per dare un' idea di questa sorte di costruzioni che riassumeremo in seguito in dettaglio.

41. La curva rappresentata dalla equazione F $(x,y)=o$, si chiama *luogo geometrico* di questa equazione.

Reciprocamente, avendosi una curva delineata sopra di un piano, qualora, con un mezzo qualunque, fondato sulla definizione o su di una proprietà caratteristica di questa curva, si giunga ad una equazione che esista dipendentemente dalle coordinate x ed y di tutti i punti di questa curva, e non esista che per questi punti, la relazione così ottenuta, vien denominata *equazione della curva*.

Porremo fine alle nozioni generali sui luoghi geometrici con due proposizioni che saranno di un uso continuo.

42. *Prima proposizione*. Si è già veduto che da una linea retta si ottiene l' equazione generale della forma $y=ax+b$ . . . (1); potendo le quantità a e b ottenere tutti i diversi valori immaginabili; così, inversamente, *qualunque equazione di primo grado fra due variabili x ed y ci dà per luogo geometrico una linea retta.*

In fatti, l' equazione proposta, qualunque siasi, può sempre ridursi alla forma $y=mx+n$ . . . (2).

Paragoniamo fra loro le equazioni (1) e (2). 1.° Se gli assi sono rettangolari, potremo fissare (fig. 8)

$$a \text{ o } \tan \alpha=m \text{ e } b=n.$$

Prendendo allora sopra AY una distanza AB=n, e guidando per il punto B una retta che formi con AX un' angolo α, di cui m sia la tangente trigonometrica, sarà (§ 10) l'equazione di questa retta, avente la posizione fissata,

$$y=x.\tan\alpha+b,\ \text{o},\ y=mx+n.$$

Dunque, viceversa, quest' ultima equazione ha per *luogo geometrico* una linea retta.

2.° Se gli assi sono obliqui, si ponga

$$a\,,\ \text{o}\ \frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ (\beta-\alpha)}=m\ \text{e}\ b=n.$$

Prendendo sopra AY (fig. 9) una parte $AB=n$, e conducendo per il punto B una retta che formi con AX un' angolo α tale, che sia

$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ (\beta-\alpha)}=m$, avremo (§ 10) per la sua equazione

$$y=x\frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ (\beta-\alpha)}+n,\ \text{ossia}\ ,\ y=m\,x+n.$$

Dunque, viceversa, ec.

Pure ci resta a sapere se l' angolo α possa esser sempre determinato mediante la relazione

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ (\beta-\alpha)}=m.$$

Da questa relazione si è veduto (§ 24) che abbiamo $\text{tang}\ \alpha=\frac{m\ \text{sen}\ \beta}{1+m\cos\beta}$; e si sa che una tangente può avere qualunque valore, perciò l' angolo α è sempre suscettibile di determinazione.

43. Siccome due punti determinano la posizione di una retta, ne siegue che, data un' equazione di primo grado in x ed y, basterà fissare, per costruirne il luogo geometrico, la posizione di due de' suoi punti.

I più rimarchevoli sono quelli ove la retta incontra gli assi; e per ottenerli si fa succesivamente, nella equazione, $y=0$, poi $x=0$; ed i valori ottenuti per x, nella prima ipotesi, e per y, nella seconda, rappresentano, l' uno l' ascissa del punto d' incontro con l' asse delle x, l' altro l'or-

dinata del punto d' incontro con l' asse delle y.

Se l' equazione ha la forma $y = mx$, siccome, facendo $y=o$, si ottiene $x=o$, e reciprocamente, ne siegue che la retta passa per l' origine; e, per avere un secondo punto, basta dare ad x un valore particolare, e costruire il valore corrispondente di y.

44. *Casi particolari.* Debba costruirsi $2y-3x=1$; (supponendo gli assi rettangolari). Da $y=o$ (fig. 25), si ha $x=-\frac{1}{3}$; e da $x=o$, $y=\frac{1}{2}$.

Prendendo dunque sopra AX una distanza $AC=-\frac{1}{3}$, e sopra AY una distanza $AB=\frac{1}{2}$, si ottiene CBL per il *luogo geometrico* richiesto.

Debba ancora costruirsi l' equazione (fig. 26)

$$3y+5x+4=o.$$

Da $y=o$, si ha $x=-\frac{4}{5}$, e da $x=o$, $y=-\frac{4}{3}$.

Prendiamo sopra AX, $AC'=-\frac{4}{5}$, e sopra AY, $AB'=-\frac{4}{3}$, otterremo B'C'L' per la retta richiesta.

Può occorrere di dover costruire la tangente dell' angolo α. Allora, dandoci la prima equazione

$$y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2},$$ ne risulta tang $\alpha=\frac{3}{2}$.

Dopo ciò, prendiamo sopra AY (fig. 25) la distanza $AB=\frac{1}{2}$. Guidiamo per il punto B una parallela

BH all' asse delle x; prendendo sopra BH una parte $BD=1$, ed innalzando una perpendicolare $DE=\frac{3}{2}$, avremo tang $EBD=\frac{3}{2}$, perciò il punto E apparterrà alla retta CBL.

La seconda equazione ci dà $y=-\frac{5}{3}x-\frac{4}{3}$,

onde tang $\alpha=-\frac{5}{3}$.

Dopo di aver preso sopra AY (fig. 26) una parte $AB'=-\frac{4}{3}$ guidiamo dal punto B' una parallela B'H' ad AX, e prendendo $B'D'=1$, ed innalzando una perpendicolare $D'E'=\frac{5}{3}$; avremo necessariamente tang $E'B'D'=\frac{5}{3}$; onde tang $E'B'X'=-\frac{5}{3}$, ed il punto E' apparterrà alla retta B'C'L'.

Tutte le costruzioni precedenti si applicano al caso in cui gli assi siano obliqui. Soltanto che, le quantità $\frac{3}{2}$ o $-\frac{5}{3}$, costruite in ultimo luogo, non più esprimimono lo tangenti, ma bensì il rapporto

$$\frac{\text{sen }\alpha}{\text{sen }(\beta-\alpha)}.$$

45. Serva di terzo ed ultimo esempio, l' equazione $y=x$ (comunque si suppongano gli assi).

Da $y=o$ (fig. 27) si ha $x=o$. Dunque la retta passa per l' origine. Facciamo ora $x=1$, otterremo $y=1$; e così per $x=2$ . . . . , sarà $y=2$, . . .

Si vede di qui che la retta ABB', così determinata, divide in due parti eguali l'angolo degli assi (t° 2° § 22).

Se gli assi fossero rettangolari, l'angolo BAX sarebbe eguale a 50°.

46. *Osservazione.* L'equazione proposta può essere in x soltanto, ovvero in y, cioè può racchiudere una sola coordinata.

In questo caso, *il luogo geometrico si riduce ad una o più rette parallele all' uno degli assi*, secondo il grado della equazione.

Sia l'equazione $2x-3=0$, cioè $x=\frac{3}{2}$. Prendiamo sopra AX (fig. 28) una distanza $AB=\frac{3}{2}$, e conduciamo, per il punto B, la BC parallela ad AY; è evidente che tutti i punti di questa retta godranno *esclusivamente* la proprietà di darci $\frac{3}{2}$ per ascissa, qualunque siasi y.

Abbiasi ancora l'equazione $y^2+y-2=0$, che, essendo risoluta, ci dà

$$y=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{(\frac{1}{4}+2)}\,;\ \text{onde}\ y=1\ \text{ed}\ y=-2.$$

Se si prendono sopra AY (fig. 29) due distanze $AB=1$, $AB'=-2$, e si conducono le GH, G'H' parallele ad AX, queste saranno tali, da darci sempre $y=1$ per la prima, ed $y=-2$ per la seconda, qualunque siasi x.

47. *Seconda proposizione.* Si è trovata (§ 33) per l'equazione generale del cerchio, rapporto agli assi rettangolari,

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2,\ \text{e sviluppando},$$

$$x^2+y^2-2px-2qy+p^2+q^2-r^2=0\ .\ .\ .\ (1)$$

Reciprocamente, *qualunque equazione di secondo grado* della forma

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0\ .\ .\ .\ (2),$$

tale cioè che *non racchiuda il rettangolo xy delle variabili*, *e nella quale i coefficienti dei quadrati siano eguali alla unità o eguali fra loro* (poichè può sempre dividersi l'equazione per questo coefficiente comune), *appartiene ad una circonferenza di cerchio*.

In fatti, dal confrontare fra loro le equazioni (1) o (2), e dal porre $-2p=A$, $-2q=B$, $p^2+q^2-r^2=C$; ne dedurremo

$$p=-\frac{A}{2},\ q=-\frac{B}{2},\ r=\sqrt{(p^2+q^2-C)}=\sqrt{(\frac{A^2+B^2}{4}-C)}$$

Ciò posto, vengano delineati due assi rettangolari AX AY, (fig. 30), e si costruisca il punto O, le di cui coordinrte siano $-\frac{A}{2}$ per l'ascissa, e $-\frac{B}{2}$ per l'ordinata. Poi, dal punto O come centro, e con un raggio$=\sqrt{(\frac{A^2+B^2}{4}-C)}$ descriviamo una circonferenza, che avrà necessariamente per equazione

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2,$$

o, sostituendo, a p, q, r, i loro valori

$$(x+\frac{A}{2})^2+(y+\frac{B}{2})^2=\frac{A^2+B^2}{4}-C,$$

o, sviluppando e riducendo

$$x^2+Ax+y^2+By+C=o,$$

risultato identico con l'equazione (2). Dunque ec.

Questa proposizione può anche dimostrarsi così:

Incominciamo coll'aggiungere ai due membri della (2) la quantità $\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}$, onde completare i quadrati x^2+Ax, ed y^2+By, e diverrà

$$x^2+Ax+\frac{A^2}{4}+y^2+By+\frac{B^2}{4}=\frac{A^2+B^2}{4}-C\text{, o}$$

$$(x+\frac{A}{2})^2+(y+\frac{B}{2})^2=\frac{A^2+B^2}{4}-C\;..\;(3)$$

equazione che può paragonarsi immediatamente con

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2\,,$$

col porre $p=-\frac{A}{2}$, $q=-\frac{B}{2}$, $r=\sqrt{(\frac{A^2+B^2}{4}-C)}$;

d' onde siegue che l'equazione (3), e perciò la (2) della quale la (3) non è che una trasformata, esprima una circonferenza che ha per centro il punto determinato dalle coordinate $-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}$, e per raggio, $\sqrt{(\frac{A^2+B^2}{4}-C)}$.

La seconda dimostrazione può sembrare più semplice, ma è meno analitica della prima.

48. *Prima osservazione.* Le quantità A, B, C, qualunque siano, possono esser tali, da darci $\frac{A^2+B^2}{4}-C=o$, ovvero $<o$.

Nel 1.° caso, il raggio r è *nullo*, e la curva si riduce ad un punto che è lo stesso centro.

Nel 2.°, il raggio r è *imaginario*; e ciò significa che non vi è curva; ed allora si dice che *il cerchio è imaginario.*

Seconda osservazione. La proposizione precedente suppone che gli assi siano rettangolari; poichè abbiamo veduto (§ 34), che l'equazione di un cerchio, rapporto agli assi obliqui, racchiude necessariamente il rettangolo $2xy\cos\beta$, termine che non può distruggersi che da $\beta=100°$.

L'equazione (2), nel caso degli assi obliqui, appartiene ad una curva che, come vedremo, presenta qualche analogia con il cerchio.

49. *Casi particolari.* Debba costruirsi l' quazione

$$2x^2+2y^2-3x+4y-1=o,$$

cui può darsi prima la forma

$$x^2+y^2-\frac{3}{2}x+2y=\frac{1}{2},$$

ovvero, aggiungendo i quadrati della metà del coefficiente del 3.° termine, e della metà del coefficiente 2, cioè $\frac{9}{16}+1^2$, o $\frac{25}{16}$,

l' altra $(x-\frac{3}{4})^2+(y+1)^2=\frac{25}{16}+\frac{1}{2}=\frac{33}{16}$.

Ciò posto, costruiremo primieramente il punto O (fig. 31) che ha $\frac{3}{4}$ per ascissa e -1 per ordinata.

Poi dal punto O come centro, e con un raggio eguale ad $\frac{1}{4}\sqrt{33}$ (cioè $=1,4\dots$ prossimo al valore esatto di o, 1) descriveremo una circonferenza. Questa curva sarà il luogo geometrico richiesto.

Sia in secondo luogo l' equazione

$$x^2+y^2-3y+2x=o,$$

capace della forma

$$(x+1)^2+(y-\frac{3}{2})^2=1+\frac{9}{4}=\frac{13}{4}.$$

Dopo di aver fissata la posizione del punto che ha -1 per ascissa e $\frac{3}{2}$ per ordinata, se da questo punto O (*fig.* 32) come centro, con un raggio e-

guale ad $\frac{1}{2}\sqrt{13}$, o 1, 8 si descriverà una circonferenza, sarà questa la curva rappresentata dalla equazione.

Tuttavia convien' osservare che, in questo esempio, siccome l'equazione è soddisfatta simultaneamente da $x=o$, $y=o$, la curva passa necessariamente per l'origine, d'onde siegue che il raggio si trovi già del tutto costruito, e rappresentato da OA. In fatti, abbiamo

$$OA=\sqrt{(\overline{AB}^2+\overline{BO}^2)}, \quad o, \quad OA=\sqrt{(\frac{9}{4}+1)}=r.$$

Potremo, similmente, conoscere, 1.° Che l'equazione

$$x^2+y^2-3x+1=o$$

rappresenta un cerchio il di cui centro ha per coordinate $\frac{3}{2}$ e o, e per raggio $\frac{1}{2}\sqrt{5}$;

2.° Che l'equazione $4x^2+4y^2-12x-8y+13=o$ rappresenta *un punto* che ha per coordinate $\frac{3}{2}$ ed 1. In fatti, trasformandola nella

$$(x-\frac{3}{2})^2+(y-1)^2=o;$$

questa avendo per primo membro la *somma di due quadrati* essenzialmente *positivi*, non può essere soddisfatta che ponendo

$$(x-\frac{3}{2})^2=o, \quad (y-1)^2=o.$$

d'onde ottiens $x=\frac{3}{2}$, $y=1$;

3.° Che l'equazione $x^2+y^2+4x-2y+7=o$, *niente* rappresenta, poichè, capace essendo della forma

$$(x+2)^2+(y-1)^2=-2,$$

ci dà nel primo membro, *la forma di due qua-*

drati positivi, che non possono eguagliare il secondo membro che è una quantità *negativa*.

50. Vediamo ora come possiamo prevalerci di queste nozioni generali sui luoghi geometrici, ponderate a maturità, per la risoluzione dei problemi di geometria sì *determinati* che *indeterminati*.

Consideriamo prima il caso in cui il quesito è *indeterminato*: e supponiamo che da esso si richieda di fissare la posizione di un certo punto sopra il piano di una figura.

Riferendo il punto cercato e le altre parti della figura a due assi, e rappresentando le coordinate di questo punto con x ed y, otterremo dalla traduzione algebrica dell'enunciato quesito una certa relazione, $F(x, y) = o$, fra queste coordinate e le quantità note, che si chiamerà *equazione del problema*; e se, con i principj stabiliti, si costruirà il *luogo geometrico* di questa equazione, la serie dei punti, costituenti questo luogo geometrico, soddisfierà all'enunciazione del quesito; e le coordinate di questi punti rappresenteranno *geometricamente* tutti i sistemi dei valori di x ed y atti a verificare l'equazione $F(x, y)=o$. (Ved. t. 2.° p. 67).

51. Non solo ci servono i luoghi geometrici per risolvere quesiti indeterminati; ma possiamo anche prevalercene per i problemi determinati a due incognite.

Supponiamo in fatti che l'enunciazione di un quesito ci abbia condotti a due equazioni

$$F(x,y)=o, \quad F'(x,y)=o;$$

ove x ed y rappresentano le coordinate di un certo punto. Potrebbe prima eliminarsi x ed y fra queste equazioni, e poi costruirsi tutti i sistemi dei valori che si otterrebbero; ciascuno dei punti così determinati soddisfarebbe alla esposizione.

Ma senza effettuare l'eliminazione, bene spesso

complicata in se e ne' suoi risultati, potremo fissare la posizione di questi stessi punti.

Infatti, l'equazione F $(x,y)=o$ riguardata isolatamente, rappresenta una certa linea, *luogo* di tutti punti, le coordinate de' quali verificano questa equazione. Supponiamola costruita, e che (fig. 33) LBH sia questo luogo geometrico.

In simil guisa, l'equazione $F'(x,y)=o$ è quella di una seconda linea, di cui tutti i punti sono tali che le loro coordinate verificano questa equazione. Supponiamo costruita ancor questa linea rapporto agli assi stessi della precedente, e che venga rappresentata da KCI.

Ciò posto, è evidente che i punti M, M', . . . ; ove queste linee s'incontrano, sono quelli che soddisfano alla esposizione, poichè le loro coordinate formano de' sistemi di valori di x e di y, che verificano nel tempo stesso le due equazioni. Perciò i punti M,M', . . . , sono altrettante *soluzioni* del quesito, di cui queste due equazioni sono l'algebrica traduzione, qualora uno siasi prefisso di fissare, sopra un piano, la posizione di un punto con certe date condizioni.

52. Quando le incognite x ed y non esprimano in origine le distanze dagli assi fissi, ma le rette qualunque; allora le coordinate dei punti M,M', ..., ne rappresenteranno i valori geometrici.

Sostituendo così le intersecazioni dei due luoghi geometrici all'eliminazione fra le loro equazioni, si giunge spesso ad ottenere costruzioni semplici ed eleganti del problema. Ne avremo varj esempj dal seguito del capitolo attuale.

Proposizioni sopra i triangoli.

53. 1. Ricercare con l'analisi i punti d'intersecazione *a due a due* delle rette condotte dai vertici A, B, C, di un triangolo ai punti medj F, E, D (fig. 34) dei lati opposti: e provare che *queste tre rette si tagliano in uno stesso punto.*

Prendiamo due assi rettangolari AX, AY l'uno dei quali, quello delle x, si confonda con uno dei lati AB del triangolo, essendo altronde fissata l'origine nella sommità A. Si riduce il quesito a formare le equazioni delle rette AF, BE, CD, e poi ad eliminare (§ 18) x ed y fra queste equazioni combinate a due a due. Ma necessita di fissare prima le coordinate dei punti A, B, C, D, E, F.

Abbiamo per le coordinate di A, $(y=o, x=o)$:
Sia AB$=c$; saranno quelle di B, $(y=o, x=c)$.
poniamo poi per il punto C, $(y=y', x=x')$;
Da D, E, F, punti del mezzo delle AB, AC, CB, si ha

$$AD=\frac{AB}{2}=\frac{c}{2},\ EI=\frac{CH}{2}=\frac{y'}{2},\ AI=\frac{x'}{2},$$

$$FG=\frac{CH}{2}=\frac{y'}{2},\ GH=\frac{BH}{2}=\frac{c-x'}{2},\ \text{onde}$$

$$AG=x'+\frac{c-x'}{2}=\frac{c+x'}{2},$$

$$D\ldots\left(y=o,\ x=\frac{c}{2}\right)$$

$$E\ldots\left(y=\frac{y'}{2},\ x=\frac{x'}{3}\right)$$

$$F \ldots (y = \frac{y'}{2},\ x = \frac{c+x'}{2}).$$

Conoscendo ora di ciascuna retta AF, BE, CD, le coordinate di due de' loro punti, potremmo ottenere la sua equazione col sostituire, nella formola del § 18

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (x - x'),$$

in luogo di x', y', x'', y'', i valori corrispondenti alla figura attuale; ma la seguente maniera di operare si troverà più elegante.

Siccome AF passa per l'origine, la sua equazione è della forma

$$y = ax;$$

ma questa retta passa per il punto F; o

$$(\frac{y'}{2},\ \frac{c+x'}{2}),$$

avremo dunque la relazione particolare

$$\frac{y'}{2} = a(\frac{c+x'}{2}),\ \text{onde}\ a = \frac{y'}{c+x'};$$

cosichè l'equazione di AF è $y = \frac{y'}{c+x'}\,x$ .. (1).

Alla retta, BE che passando per il punto B o $(o,\ c)$, competerà l'equazione (§ 19) della forma $y - y' = a\ (x - x')$ che, attesa la sostituzione di o ad y', c ad x', ed a' ad a, diverrà della forma $y = a'(x - c)$.

Ma, siccome questa stessa retta passa per il punto E, o $(\frac{y'}{2},\ \frac{x'}{2})$, avremo la relazione

$$\frac{y'}{2} = a'\ (\frac{x'}{2} - c),$$

onde $a' = \frac{y'}{x'-2c}$, dunque l'equazione di BE sarà

$$y = \frac{y'}{x'-2c}(x-c) \ldots (2).$$

Così si avrebbe per la CD,

$$y = \frac{y'}{2x'-c}(2x-c) \ldots (3).$$

Restano ora da combinarsi queste tre equazioni. Primieramente, si deduce dalle (1) e (2)

$$\frac{y'}{c+x'} \cdot x = \frac{y'}{x'-2c}(x-c), \text{ o,}$$

togliendo i denominatori, ed effettuando i calcoli,
$x'y' \cdot x - 2cy' \cdot x = cy' \cdot x - c'y' + x'y' \cdot x - cx'y'$;
riducendo; $3cy' \cdot x = cy'(c+x')$; dunque

$$x = \frac{c+x'}{3}.$$

Questo valore portato nella (1), ci dà

$$y = \frac{y'}{3}.$$

In secondo luogo, dalle (1) e (3) otterremo

$$\frac{y'}{c+x'} \cdot x = \frac{y'}{2x'-c}(2x-c), \text{ o}$$

$2x'y' \cdot x - cy' \cdot x = 2cy' \cdot x - c'y' + 2x'y' \cdot x - cx'y'$,
o riducendo, $3cy \cdot x = cy'(c+x')$; dunque

$$x = \frac{c+x'}{3} \text{ e perciò } y = \frac{y'}{3}.$$

E verremo così a conoscere che le coordinate del punto d'intersecazione delle due rette AF, BE, sono identiche con quelle del punto d'intersecazione

di AF e CD. E perciò *queste tre rette si tagliano in un medesimo punto*.

Se dal punto O, comune a queste tre rette, si cali l'ordinata OP, i due triangoli simili DCH, DOP, ci danno

$$OP : CH :: DO : DC; \text{ ma } OP = \frac{1}{3} y' = \frac{CH}{3},$$

dunque anche $$DO = \frac{DC}{3}$$

Questo punto è cognito in STATICA col nome di *centro di gravità* del triangolo.

Riflettendo sulla precedente analisi, si conosce facilmente essere i calcoli li medesimi qualunque sia l'inclinazione degli assi.

Tuttavia, diverranno più semplici, qualora, conservando AB (fig. 35) per asse delle x, si prenda per asse delle coordinate una retta AY parallela a CD; ciò che è lecito attesochè la CD ha una posizione cognita.

In tal caso, è evidente che l'ascissa x' del punto C diviene parallela ed eguale ad AD o $\frac{c}{2}$; onde $c = 2x'$; e le equazioni (1), (2), (3) divengono:

per la retta AF, $y = \frac{y'}{3x'} x'$ . . . . . . (1.ª).

per la retta BE, $y = -\frac{y'}{3x'}(x - 2x')$ . . (2.ª)

e per la retta CD, $x = x'$, ... (3.ª)

(essendo quest'ultima retta parallela ad AY).

Ciò posto questa (3.ª) combinata con la (1.ª) ci dà

$$y = \frac{y'}{3};$$

e dalla (3.ª) combinata con la (2.ª) risulta ancora

$$y = \frac{y'}{3}.$$

Perciò, le coordinate de' punti d'intersecazione, di CD, AF; e di CD, BE, sono

$$x=x', \ y=\frac{y'}{3}=\frac{DC}{3}.$$

Ciò che prova quanto la scelta degli assi influisca sulla semplicità dei calcoli, nella risoluzione de quesiti, coll'ajuto della Geometria analitica.

54. *Determinare i punti d' intersecazione a due a due delle perpendicolari condotte dai tre vertici del triangolo ABC ai lati opposti.* Si dimostra che queste perpendicolari *si tagliano in uno stesso punto* O.

Devono gli assi esser qui rettangolari (fig. 37), poichè deve aversi in considerazione la relazione della perpendicolarità di due rette (ved. § 25).

Prendiamo del pari la AB per asse delle ascisse, e per asse delle ordinate la perpendicolare AY innalzata dal vertice A.

Rappresentando sempre con c la distanza AB o l' ascissa del punto B, con x', y' le coordinate del punto C, avremo prima per l' equazione della CD $x=x'$ . . . . , (1) (giacchè questa retta è parallela all' asse delle y).
Prima di rintracciare le equazioni delle AF e BE, dobbiamo determinare quelle delle rette CB, AC, alle quali sono esse perpendicolari.

Ora, la retta CB, passando per i due punti (y', x') e (o, c), ha per equazione (§ 18),

$$y-y'=a(x-x'),$$

avendo a per valore $\frac{y'}{x'-c}$, poichè abbiamo

$$y''=o, \ x''=c.$$

Quella della retta AC, che passa per l' origine, è $y=mx$, avendo m per valore $\frac{y'}{x'}$, perchè il punto C si trova sopra di questa retta.

Ciò posto, siccome AF passa per l' origine, ha

un' equazione della forma $y=a'x$; e dalla sua perpendicolarità a CB si deduce (§ 25) la relazione

$$aa'+1=o\ ,\ \text{onde}\ a'=-\frac{1}{a}=\frac{c-x'}{y'}.$$

Perciò l'equzione di AF è

$$y=\frac{c-x'}{y'}x\ .\ .\ .\ .\ .\ (2).$$

La retta BE costretta a passare per il punto B, o $(o\ ,\ c)$, ha per equazione $y=m'(x-c)$; e dall'essere normale ad AC, ci dà la relazione

$$mm'+1=o\ ,\ \text{onde}\ m'=-\frac{1}{m}=-\frac{x'}{y'}.$$

Dunque l'equazione di BE è

$$y=-\frac{x'}{y'}(x-c)\ .\ .\ .\ .\ .\ (3).$$

Dal combinare adesso le (1) e (2), otterremo per

$$x=x'\ ,\quad y=\frac{(c-x')x'}{y'}.$$

Così combinando le equazioni (1) e (3) si ottiene per $x=x'$, $y=-\frac{x'}{y'}(x'-c)=\frac{(c-x')x'}{y'}$.

Dunque le coordinate del punto d'intersecazione delle rette CD, AF, sono le stesse che quelle del punto d'intersecazione delle rette CD, BE; perciò *queste tre rette si tagliano* in un medesimo punto.

55. *Determiniamo i punti d'intersecazione a due a due delle perpendicolari innalzate dal mezzo dei lati di un triangolo* ABC (fig. 36) *a questi stessi lati. Proviamo che queste tre normali si tagliano in un medesimo punto* O.

Per maggior semplicità, prenderemo ancora la AB per asse delle x; e la perpendicolare innalzata dal punto A per asse delle y.

Siano egualmente $AB=c$, $AH=c'$, $CH=y'$. Abbiamo già trovato per le coordinate dei punti D, E, F,

$$D\ ...\ \left(o\ ,\ \frac{c}{2}\right);\ E\ ...\ \left(\frac{y'}{2}\ ,\ \frac{x'}{2}\right);F\ ...\left(\frac{y'}{2}\ ,\ \frac{c+x'}{2}\right).$$

Ciò posto, sarà l'equazione per DL,

$$x=\frac{c}{2} \ldots\ldots (1)$$

perchè DL è parallela ad AY.

La retta EM passando per il punto E, o

$$\left(\frac{y'}{2}, \frac{x'}{2}\right),$$

avrà l'equazione della forma

$$y-\frac{y'}{2}=a\left(x-\frac{x'}{2}\right)$$

e poichè dev' essere normale ad AC che ha per equazione

$$y=\frac{y'}{x'}x \text{ , ne risulta } a=-\frac{x'}{y'}.$$

Perciò, la retta EM ha per equazione

$$y-\frac{y'}{2}=-\frac{x'}{y'}\left(x-\frac{x'}{2}\right) \ldots\ldots (2).$$

In simil guisa si troverebbe per l'equazione di FN,

$$y-\frac{y'}{2}=\frac{c-x'}{y'}\left(x-\frac{c+x'}{2}\right) \ldots (3).$$

Combinando fra loro le (1) e (2), avremo per

$$x=\frac{c}{2},\ y=\frac{y'}{2}+\frac{x'^2-cx'}{2y'}=\frac{x'^2+y'^2-cx'}{2y'}.$$

Le (1) e (3) combinate in egual guisa ci danno, per

$$x=\frac{c}{2},\ y=\frac{y'}{2}+\frac{(x'-c)\,x'}{2y'}=\frac{x'^2+y'^2-cx'}{2y'}..$$

Perciò, *le tre rette si riuniscono in uno stesso punto.*

56. *N, B.* Se, nel risultato ora ottenuto per y, si ponga, in luogo di $x'^2+y'^2$, il suo valore AC^2, o b^2 che ci dà la figura, si trova per le coordinate del punto O comune alle tre rette, il quale altro non è che *il centro del cerchio circoscritto*,

$$x=\frac{c}{2},\quad y=\frac{b^2-cx'}{2y'}.$$

Calcoliamo ora la distanza AO; abbiamo

$$AO=\sqrt{(x^2+y^2)}=\sqrt{\left(\frac{c^2}{4}+\frac{(b^2-cx')^2}{4y'^2}\right)}=\frac{1}{2y'}\sqrt{(c^2y'^2+(b^2-cx')^2)},$$

o, dallo sviluppo della quantità sotto il vincolo, valutando la relazione

$$x'^2+y'^2=b^2,\quad AO=\frac{b}{2y'}\sqrt{(b^2+c^2-2cx')}.$$

Ma l' espressione $\sqrt{(b^2+c^2-2cx')}$ è il valore del lato CB o a (t. 2. § 39). Dunque finalmente,

$AO=\frac{ab}{2y'}$; onde ponendo $AO=r$, $2r\times y'=a\times b$;

ciò che prova, *che il rettangolo dei due lati di un triangolo è eguale al rettangolo che ottiensi dal diametro del circolo circoscritto per la perpendicolare calata sul terzo lato dal vertice opposto.*

Osserviamo ancora che dalla superficie del triangolo ABC, cioè da $S=\frac{cy'}{2}$, ne risulta $2y'=\frac{4S}{c}$.

Dunque l' espressione di AO o di r, diviene

$$r=\frac{abc}{4S};$$

cioè *il raggio del cerchio circoscritto ha per l' espressione il prodotto dei tre lati del triangolo diviso per il quadruplo della sua superficie.*

57. La costruzione sopra la stessa figura 38 dei punti di concorso relativi alle tre precedenti proposizioni, ci presenta una circostanza singolare nella *posizione di questi tre punti sopra una stessa retta.*

Per essere convinti dall' analisi, osserviamo primieramente che in generale, si conosce che tre punti

$$(x', y'), (x'', y'') \text{ ed } (x''', y''')$$

sono in linea retta, ogni qual volta i due rapporti

$$\frac{y'-y''}{x'-x''}, \frac{y'-y'''}{x'-x'''} \text{ siano eguali.}$$

In fatti, questi rapporti, che altro non sono che (§ 18) i coefficienti di x nelle equazioni delle rette che uniscono il primo punto al secondo ed il primo al terzo, qualora siano eguali, proveranno che *le rette sono parallele* (§ 20). Ma inoltre queste rette hanno già il punto comune (x', y'); dunque esse si confondono,

Se uno dei punti (x', y') è l'origine delle coordinate, basta che abbiasi $\frac{y''}{x''}=\frac{y'''}{x'''}$, ossia

$$y''x'''-x''y'''=o.$$

Ciò posto, ammettiamo che i punti O, O′, O″ corrispondenti alle tre posizioni, vengano riferiti alli stes i assi AX, AY, uno de' quali sia AB base del triangolo, l'altro la normale elevata dal vertice A, e per conservare le indicazioni già fissate per i punti B e C conveniamo di rappresentare i punti O, O′, O″ con (x_1 ed y_1), (x_2 ed y_2), (x_3 ed y_3).

Il quesito si riduce a calcolare

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}, \quad \frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}.$$

Ma abbiamo trovato (§ 53, 54 e 55)

$$\left(y_1=\frac{y'}{3}, x_1=\frac{c+x'}{3}\right), \left(y_2=\frac{(c-x')x'}{y'}, (x_2=x'), x_2=x'\right)$$

$$\left(y_3=\frac{x'^2+y'^2-ex'}{2y'}, \ x_3=\frac{c}{2}\right). \quad \text{Dunque}$$

1. $$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\frac{y'^2}{3}-\frac{(c-x')x'}{y'}}{\frac{c+x'}{2}-x'}=\frac{y'^2+3x'^2-3cx'}{(-2x')y'}$$

2. $$\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}=\frac{\frac{y'}{3}-\frac{y'^2+x'^2-cx'}{2y'}}{\frac{c+x'}{3}-\frac{c}{2}}=\frac{-y'^2-3x'^2+3cx}{(2x'-c)y'}$$

Questi due risultati sono identici. Perciò *i tre punti* O , O′, O″, *sono in linea retta.*

§ III. *Proposizioni intorno al cerchio.*

58. Le condizioni che esprimono quando due circonferenze *si tagliano*, *si toccano*, *o non hanno alcun punto comune*, già vedute in Geometria (t. 2. § 54) si rintraccino ora con l' ajuto dell' analisi.

Siano O , O′ (fig. 39) i centri di due circonferanze; r, r', i loro raggi, ed $OO'=d$ la distanza dei centri.

Prendiamo per asse delle x la linea dei centri; e per asse delle y la normale OY elevata dal centro O.

Il cerchio, che ha per raggio r, essendo riferito al suo centro e ai due assi rettangolari, ci da (§ 37) per l' equazione di questo cerchio

$$y^2+x^2=r^2 \quad . \; . \; . \; . \; (1).$$

Quella del secondo cerchio; il di cui centro ha per coordinate $p=d$, $q=o$, è (§ 33)

$$y^2+(x-d)^2=r'^2 \quad . \; . \; . \; . \; (2).$$

Ciò posto, per esprimere che le due circonferenze si tagliano, e per ottenere i loro punti d' intersecazione, conviene (§ 22) stabilire che le loro

equazioni hanno luogo simultaneamente, ed eliminare x ed y fra queste equazioni.

A tal fine, sottrarremo la (2) dalla (1) ed avremo $$2dx-d^2=r^2-r'^2;$$

per dedurne $$x=\frac{r^2-r'^2+d^2}{2d}.$$

Portando questo valore nella (1), avremo, a riduzione effettuata,

$$y=\pm\frac{1}{2d}\sqrt{(4d^2r^2-(r^2-r'^2+d^2)^2)}$$

Discussione. La sola ispezione di questi valori prova, prima che, nell'ipotesi in cui la quantità sotto il radicale del valore di y è *positiva*, nel qual caso i valori di x e di y sono reali, e *le circonferenze hanno due punti comuni*, prova, dico, che i due punti d'intersecazione hanno una medesima ascissa OP, ma due ordinate eguali e con segno contrario.

Dunque, ogni qual volta due circonferenze si tagliano, *la linea dei centri è normale alla corda comune, e la divide in due parti eguali* (t.° 2.ª § 54).

Ora, per sapere quando sarà la y *reale* o *imaginaria*, (essendo x sempre reale), sottoporremo la nostra espressione ad una trasformazione.

La quantità, sotto il radicale, essendo evidentemente la differenza di due quadrati, può decomporsi nel prodotto

$$(2dr+r^2+d^2-r'^2)\ (2dr-r^2-d^2+r'^2);$$

ma ciascuno di questi due fattori è anch'esso la differenza di due quadrati $(r+d)^2-r'^2$ ed $r'^2-(r-d)^2$;

dal 1.° abbiamo, $(r+d+r')\ (r+d-r')$,

e dal 2.°, $(r'+r-d)\ (r'-r+d)$.

Dunque, finalmente, diverrà il valore di y

$$y = \pm \frac{1}{2d} \sqrt{[(r+r'+d)(r+d-r')(r+r'-d)(r'+d-r)]}.$$

Sotto tal forma presentandosi il primo fattore compreso dal vincolo essenzialmente *positivo*, scorgiamo che y sarà *reale* qualora gli altri tre siano positivi, o positivo l'uno e negativi gli altri due. Ma quest' ultima circostanza non può mai esistere, perchè, qualora uno di questi tre fattori sia *negativo*, gli altri due sono necessariamente *positivi*.

Sia per esempio, $r+d-r'<o$, onde $r+d<r'$; necessariamente risulta da ciò $r<r'$ e $d<r'$; dunque $r'-r+d$ ed $r'-d+r$ sono *positivi*.

Con più forte ragione, i tre fattori non potrebbero essere *negativi* simultaneamente.

Perciò, non possono presentarsi che *due* casi: o i tre fattori sono *positivi* simultaneamente, ed in questo caso y è *reale*; e perciò *le due circonferenze si tagliano* ogni qualvolta sia

$$r+d>r', \ r+r'>d, \ r'+d>r;$$

cioè, ciascuna di queste tre cose, raggi e distanza dei centri, *minore della somma delle al.re due*:

Ovvero, uno dei tre fattori è *negativo* e i due altri *positivi*; e in questo caso y è *imaginario*, e non vi è intersecazione. Perciò *due circonferenze non hanno alcun punto comune*, quando una delle addotte ineguaglianze abbia luogo in un'ordine inverso.

Tuttavia potrebbe aversi

$$r+d-r'=o, \text{ o }, r+r'-d=o, \text{ o } r'+d-r=o;$$

cioè $\quad r+d=r', \text{ o } r+r'=d, \text{ o } r'+d=r.$

In questo caso, i due valori di y si riducono a o, e le due circonferenze non hanno più che *un punto comune* che è necessariamente posto sulla linea dei centri, poichè la sua ordinata è *nulla*.

Dunque, *due circonferenze di cerchio si toccano, qualora la distanza dei centri è eguale alla somma o alla differenza dei raggi.*

Questi risultati sono tutti conformi ai teoremi già stabiliti in Geometria sulla *intersecazione* e *contatto* di due circonferenze (Ved. t. 2. § 54).

59. *Casi particolari.* Sia $d=o$, nel qual caso le due circonferenze sono concentriche; i valori di x e di y divengono

$$x=\frac{r^2-r'^2}{o} \text{ ed } y=\frac{\sqrt{[-(r^2-r'^2)^2]}}{o},$$

espressioni di *forma infinita.* Ma osserviamo che la quantità sotto il radicale che ci dà il valore di y, essendo essenzialmente negativa, rappresenta un valore che si conserva *imaginario*; ciò che dev'essere, poichè le circonferenze non possono avere alcun punto comune.

Tuttavia, se fosse nel tempo stesso $d=o$, ed $r=r'$, i valori di x e di y si ridurrebbero ad

$$x=\frac{o}{o},\quad y=\frac{o}{o}.$$

In fatti, in tal caso, le due circonferenze si confondono ed hanno un' infinità di punti comuni.

Osserveremo ancora che i risultati ora addotti di *forma infinita*, sono analoghi a quelli già ottenuti (§ 22) nel caso del parallelismo delle due rette, delle quali si cerca il punto d' intersecazione; ed, effettivamente, esiste allora una specie di parallelismo fra le due circonferenze, poichè i loro punti sono ovunque *egualmente distanti.*

60. *Una circonferenza debba farsi passare per tre punti dati.*

Qualora si conosca la posizione del centro di un cerchio sopra un piano, e la lunghezza del suo raggio, le quantità costanti p, q, r, che entrano nella equazione

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

dovranno riguardarsi come date a *priori*, ed il cerchio sarà completamente determinato da questa equazione. Ma, possiamo, come per la retta, proporci di determinare un cerchio che soddisfi a certe condizioni, come quelle di passare per punti dati, di esser tangente ad una o più rette, ad uno o più cerchj, etc.; in tal caso p, q, r sono *costanti indeterminate* i di cui valori dipendono da queste condizioni diverse; e poichè sono *tre* le indeterminate, ne siegue che possono imporsi ad un cerchio tre condizioni diverse, quelle, per esempio, di passare per *tre* punti dati.

Siano in generale (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') tre punti dati sopra un piano rapporto a due assi rettangolari, e chiamiamo p, q, r le coordinate del suo centro ed il suo raggio; la sua equazione avrà la forma $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$? . . . . . . (1) essendo p, q, r, quantità da determinarsi.

Ora poichè ciascuno di questi tre punti deve trovarsi sulla circonferenza, devono aversi le relazioni

$$(x'-p)^2+(y'-q)^2=r \;,$$

$$(x''-p)^2+(y''-q)^2=r^2,$$

$$(x'''-p)^2+(y'''-q)^2=r^2 \;;$$

ed il quesito si riduce ad eliminare le p, q, r, fra queste relazioni per riportarle poi nella equazione (1)

Sviluppando e sottraendo sucessivamente la 2.ª e la 3.ª relazione dalla 1.ª si trova

$$x'^2-x''^2+y'^2-y''^2-2p(x'-x'')-2q(y'-y'')=0 \;.\;.\;.\; (2).$$

$$x'^2-x'''^2+y'^2-y'''^2-2p(x'-x''')-2q(y'-y''')=0, \;.\;.\; (3)$$

equazioni di 1.° gr.° in p, q, dalle quali possono

dedursi facilmente i valori delle incognite p, q; e questi, sostituiti nella relazione (1), ci faranno ottenere il valore di r.

Senza qui entrare nel dettaglio de' calcoli a bastanza cogniti, benchè complicati, tradurremo invece geometricamente le stesse equazioni (2) e (3).

Ciascuna di esse, riguardata sola, essendo di 1.° gr.° in p e q, ed esprimendo le coordinate di un punto, rappresenta (§ 42) una linea retta; e se vengano costruite successivamente rapporto alli stessi assi, il punto ove queste linee s' incontreranno sarà (§ 32) il centro del cerchio che si richiede.

Occupiamoci prima della equazione (2), che può porsi sotto la forma

$$q = -\frac{x'-x''}{y'-y''} \cdot p + \frac{y'^2 - y''^2 + x'^2 - x''^2}{2(y'-y'')},$$

ovvero

$$q - \frac{y'+y''}{2} = -\frac{x'-x''}{y'-y''}\left(x - \frac{x'+x''}{2}\right) \ldots (4).$$

Ciò posto, siano M, M', M'' (fig. 40), i punti che hanno per coordinate (x', y'), (x'', y''), (x''', y'''). L' equazione della retta M M' è (§. 18)

$$y - y' = \frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x') \ldots (5).$$

Per altra parte, i trapezj MM'P'P, MM'R'R ci danno per le coordinate NQ, NS del punto N, medio di MM' (t. 2. § 31)

$$NS = \frac{x'+x''}{2}, \quad NQ = \frac{y'+y''}{2};$$

cosichè l' equazione (4) è già quella di una retta che passa per il punto N.

In oltre, dal confronto dei due coefficienti

$\frac{y'-y''}{x'-x''}$ e $-\frac{x'-x''}{y'-y''}$ delle (4) e (5),

si vede che essi soddisfano alla relazione

$$aa'+1=o,$$

che esprime, (§ 25) che due rette sono perpendicolari fra loro.

Di qui è che l' equazione (4), o la (2) rappresenti la retta innalzata dal punto N medio di MM' perpendicolarmente a questa ultima linea. E perciò si rende facile la sua costruzione.

In egual modo può conoscersi che la (3) rappresenta la normale innalzata dal punto medio N' di MM'' che ha per equazione

$$y-y'=\frac{y'-y'''}{x'-x'''}(x-x').$$

Il centro vien dunque determinato da questa costruzione che è precisamente quella che si trova nel t. 2. § 44.

61, Saremmo giunti a risultati molto più semplici prendendo, per origine delle coordinate, il punto M (fig. 41) e per asse delle ascisse la linea MM': ciò che è permesso, potendo disporsi degli assi ad arbitrio.

Per questa ipotesi sarebbe

$$x'=o, \quad y'=o, \quad y''=o,$$

e le equazioni (2) e (3) diverrebbero

$$-x''^2+2px''=o,$$

$$-x'''^2-y'''^2+2px'''+2qy'''=o.$$

Dalla prima, si deduce $p=\frac{x''}{2}$, equazione che esprime evidentemente una retta parallela a MY, guidata per il punto N medio di MM'.

Alla seconda poi potrà darsi la forma

$$q=-\frac{x'''}{y'''}p+\frac{x'''^2+y'''^2}{2y'''},$$

e

$$q-\frac{y'''}{2}=-\frac{x'''}{y'''}(p-\frac{x'''}{2}),$$

equazione che rappresenta una retta che, nel passare per N' punto medio di MM'', è perpendicolare alla retta MM'' o $\frac{y'''}{x'''}x$.

Le equazioni (2) e (3) sono appunto molto complicate perchè sono stati presi gli assi in una qualunque situazione rapporto ai tre punti dati. Si vede dunque quanto sia importante, per la semplicità dei calcoli, la scelta convenevole degli assi.

62. Suppongasi ora che debba farsi passare un cerchio per due punti dati, coll' assoggettarlo inoltre ad esser tangente di un' altro cerchio dato in posizione e in grandezza.

Si rappresentino con (x', y'), (x'', y'') le coordinate di due punti, con p, q, r, le costanti del cerchio cercato; avremo prima le due relazioni

$$(x'-p)^2+(y'-q)^2=r^2, (x''-p)^2+(y''-q)^2=r^2.$$

Per altra parte, se p, q, r, saranno le costanti del cerchio dato, D la distanza dei centri dei cerchi; avremo, atteso quanto si è detto (§ 58) sopra il contatto dei cerchi,

$$D^2=(r'\pm r)^2.$$ Dunque (§ 7),

la condizione del contatto è espressa dalla relazione

$$(p'-p)^2+(q'-q)^2=(r'\pm r)^2,$$

la quale, con le due precedenti, racchiude tutti

gli elementi necessarj alla determinazione delle incognite p, q, r.

Se il cerchio dovesse passare per un punto dato (x', y'), ed essere tangente a due altri cerchi dati dalle costanti (p', q', r'), (p'', q'', r''), si avrebbero le tre relazioni

$$(x'-p)^2+(y'-q)=r^2,\ (p'-p)^2+(q'-q)^2=(r'\pm r^2),$$
$$(p''-p)^2+(q''-q)^2=(r''\pm r)^2.$$

Nella risoluzione di questa sorte di quesiti tutta la difficoltà consiste nello scegliere gli assi coordinati in modo che le equazioni ed i calcoli riescano più semplici che sia possibile, e che possano dedursene costruzioni facili ed eleganti.

Restano ancora a stabilirsi le condizioni relative al contatto delle rette con le circonferenze. Questa dottrina delle tangenti è una delle più interessanti della geometria analitica.

§ IV. *Problemi delle tangenti.*

63. Incominciamo dal fissare il vero senso da annettersi alla voce *tangente*.

Si è definita in Geometria (t.° 2.° § 45) la tangente al cerchio essere una retta che non ha comune con la circonferenza che un solo punto: ma questa definizione non si presenta convenevole a tutte le curve.

Sia, in fatti, una linea come LN'NKMH (fig. 42) composta di parti concave le une, convesse le altre. Se in un punto qualunque M si conduca una retta MNN', che sembri trovarsi, rapporto alla parte KMH, nella stessa situazione della tangente al cerchio, questa retta può supporsi che non abbia che un punto comune con questa parte della curva; ma, prolungata la retta indefinitamente, passerà per altri punti N, N', ... della curva. Dunque non può dirsi con esattezza aver essa un sol punto comune con la LN'NKMH.

Per avere una definizione applicabile a tutte le curve, convien figurarsi che una retta MG avente varj punti M, M', M'', comuni con la curva, giri attorno di uno di questi punti, M, per esempio, in guisa che prenda le diverse posizioni MM'M'', $m'Mm''m'''$ . . . ; si vede che, in questo movimento il punto M', che si trovava prima a sinistra di M, si trova ora a destra di questo stesso punto M', in m'. Ora nel passaggio dalla prima alla seconda posizione, deve necessariamente esisterne una intermedia ove il punto M' vada a confondersi con il punto M; ed è in questa posizione, rappresentata da MNN', che la retta prende il nome di *tangente*. Dobbiamo dunque riguardare una tangente come una secante alla curva, *li di cui due punti d' intersecazione vengono a riunirsi in un solo*.

Non è poi di assoluta necessità che il moto della retta si effettui attorno di un precisato punto d' intersecazione, potendo aver luogo attorno di qualunque punto. Può anche, in certe circostanze, muoversi la retta parallelamente a se stessa.

Riprendiamo la curva $y^2=2x$; cioè $y=\pm\sqrt{2x}$ (fig. 23) già discussa al § 39.

Siccome a ciascun valore positivo di x corrispondono due valori di y eguali e con segno contrario, ne siegue che, qualunque parallela ad AY, condotta alla destra di quest' asse, sia una secante avente due punti comuni colla curva; ma, a misura che diminuisce la x, diminuiscono le distanze M'N', MN, ... , fra questi punti d' intersecazione; e quando in fine si suppone $x=o$, nel qual caso il valore di y diviene $y=\pm o$, i due punti d' intersecazione si riuniscono nel punto A, e la retta AY vien denominata *tangente*.

In simil guisa potremo ravvisare nella curva discussa al (§ 40), che ha per equazione

$$y^2-x^2=4, \quad \text{onde} \quad x=\pm\sqrt{(y^2-4)},$$

che la retta IK (fig. 24) parallela ad AX, e situata alla distanza $y=2$, è una secante i di cui due punti d' intersecazione si riuniscono nel punto B.

Una curva, riguardandosi comunemente come un poligono di un'infinità di lati, o come la traccia di un punto che varia direzione in ogni istante, ci presenta, nella tangente ad un suo punto dato, *l'elemento della curva, che corrisponde a questo punto, e che si suppone prolungato indefinitamente.* Sotto questo punto di vista vien riguardata nell' alta analisi; ma qui la considereremo come *una secante i di cui due punti d' intersecazione si riuniscano in un solo:* e questo carattere è quello che ora procureremo di tradurre analiticamente.

64. Siano, in generale, $F(x, y)=o$ l' equazione di una curva, ed $y=ax+b$ l' equazione di una retta riferita alli stessi assi.

Per determinare i punti comuni alla curva ed alla retta, conviene (§ 22) esprimere che queste due equazioni sono coesistenti, cioè che hanno luogo nel tempo stesso. Sostituendo nella prima, per y, il suo valore dedotto dalla seconda, si otterrà una nuova equazione in x; i di cui valori saranno le ascisse dei differenti punti d' intersecazione; e questi valori, sostituiti nell' equazione $y=ax+b$, faranno conoscere le corrispondenti ordinate di questi stessi punti.

Ora, se si vuò fissare la posizione della retta in guisa che divenga tangente; basta di esprimere, con i mezzi noti dell' algebra, la condizione che due dei valori di x siano eguali; ciò che, attesa l' equazione $y=ax+b$, trae seco generalmente anche la condizione che i valori di y siano eguali. La prima condizione, espressa analiticamente, altro non è che una certa relazione fra le quantità a e b considerate come *costanti indeterminate*; che se a questa relazione venga unita la seguente

$$y'=ax'+b;$$

che esprime che la retta passa per un punto dato, si avrà quanto basta per determinare completamente a e b.

65. L' equazione della curva, se è di secondo grado, colla sostituzione di $ax+b$ in luogo di y, prenderà la forma di 2.° gr.°

$$mx^2+nx+p=o;$$

ciò che prova, come di passaggio, che una retta non può mai aver più di *due* punti comuni con una curva di secondo grado.

Si è veduto (t.° 1.° § 127) che, ad oggetto che le due radici di un equazione di secondo grado sieno eguali, bisogna che abbiasi, fra m, n, p, la relazione $n^2-4mp=o$. Questa è dunque la condizione che deve svilupparsi per tutte le curve di secondo grado, incominciando dal cerchio, che ne è un caso particolare.

66. *Per un punto dato* (x', y') *condurre una tangente ad un cerchio*, che si suppone riferito ad assi rettangolari, con l' origine al centro (§ 37). L' equazione del cerchio essendo $y^2+x^2=r^2$ .... (1) quella della retta del cerchio avrà la forma

$$y-y'=a(x-x') \quad .... \quad (2);$$

ove la quantità b trovasi già eliminata (§ 19).

Per esprimere primieramente che il cerchio e la retta si tagliano, convien combinare le loro equazioni, supponendo che le x e le y siano le medesime. Ora, l' equazione (2) ci dà

$$y=ax+y'-ax';$$

onde, sostituendo nella (1), e riducendo,

$$(a^2+1)x^2+2a(y'-ax')x+(y'-ax')^2-r^2=o \ ...(3).$$

Attribuendo ad a dei valori particolari, si otter-

rebbe una serie di secanti alla curva, i di cui due punti d'intersecazione avrebbero per ascisse i valori di x dedotti dalla equazione (3), e per ordinate i valori di y derivate dalla equazione (2), dopo di esservi stati sostituiti ad a ed x i loro valori.

Volendo adesso che la secante divenga tangente, bisogna che le due radici della (3) siano eguali; ciò che ci dà, attesa la relazione $n^2-4mp=o$ (§ 65),

$$4a^2(y'-ax')^2-4(a^2+1)[(y'-ax')^2-r^2]=o\ldots(4)$$

o, dividendo per 4 e sopprimendo le due quantità

$$a^2(y'-ax')^2,\quad -a^2(y'-ax')^2,$$

che si distruggono, avremo

$$-(y'-ax')^2+(a^2+1)r^2=o;$$

equazione che, sviluppata ed ordinata rapporto ad a, diviene

$$(r^2-x'^2)a^2+2x'y'.a+r^2-y'^2=o,\ldots(5).$$

E da questa equazione, a riduzioni eseguite, si deduce

$$a=-\frac{r'y'}{r^2-x'^2}\pm\frac{r}{r^2-x'^2}\sqrt{(x'^2+y'^2-r^2)}\ldots(6)$$

espressione che, sostituita nella (2), ci darà l'equazione della tangente richiesta.

Da questo risultato (6) veniamo a conoscere che per un dato punto N (fig. 43), è possibile, generalmente parlando, di condurre due tangenti NM, NM' alla circonferenza. Tuttavia, richiedendosi da ciò che i due valori di a siano reali ed ineguali, dovremo avere

$$x'^2+y'^2>r^2;\ \text{o, giacchè}\ x'^2+y'^2=\overline{ON}^2,\ldots\overline{ON}^2>\overline{OH}^2,$$

dunque il punto (x', y') dev' esser posto fuori del cerchio.

Se si supponga $x'^2+y'^2=r^2$, cioè che il punto sia nella curva, il doppio valore di a si ridurrà ad un solo, cioè

$$a=\frac{x'y'}{r^2-x'^2}, \text{ o } a=\frac{x'}{y'}, \text{ perchè } y'^2=r^2-x'^2.$$

Si vede in fatti che, per una tal supposizione, l'equazione (5) diviene

$$a^2y'^2+2ax'y'+x'^2=0, \text{ o } (ay'+x')^2=0;$$

onde $a=\frac{x'}{y'}$.

Per distinguere questo caso dal caso generale, converremo che il punto dato, che altro non è che il punto di contatto, venga rappresentato dà(x'',y''); e allora avremo per equazione della tangente al cerchio, in un punto di questa curva,

$$y-y''=-\frac{x''}{y''}(x-x'')\ldots, a=\frac{x''}{y''}.$$

67. *Osservazione* riguardo al metodo precedente. Formando, mediante le equazioni (1) e (2), un equazione con la sola y, e ciò col sostituire nella (1) il valore

$$x=\frac{y-(y'-ax')}{a},$$

dedotto dalla (2), si trova

$$(a^2+1)y^2-2(y'-ax')y+(y'-ax')^2-a^2r^2=0;$$

e, volendosi che la retta divenga tangente, conviene esprimere che le due radici di questa equazione sono eguali, ciò che ci dà fra i coefficienti la relazione

$$4(y'-ax')^2-4(a^2+1)[(y'-ax')^2-a^2r^2]=0,$$

o, dividendo per 4, e sopprimendo le quantità

$(y'-ax')^2$, $-(r'-ax')^2$, che si distruggono,

$$a^2[(y'-ax')^2-r^2(a^2+1)]=o.$$

Ora questa equazione può venir soddisfatta in due maniere diverse, o ponendo $a^2=o$, o facendo

$$(y'-ax')^2-r^2(a^2+1)=o.$$

L'ultima di queste due relazioni è certo identica con la relazione (5); ma troviamo nel tempo stesso per soluzione $a^2=o$.

Vi è anche di più. Se noi risaliamo all'equazione (4) del numero precedente, e se, senza attendere alle riduzioni dei termini simili, sviluppiamo i calcoli, veniamo ad ottenere un'equazione di 4.° grado in a con i coefficienti di a^4 e di a^3 in realtà *nulli*. Ma sappiamo dall'Algebra che una simile equazione ha due delle sue radici *infinite*. Perciò l'equazione (4), oltre i due valori che si hanno dalla equazione (5), racchiude ancora implicitamente due radici infinite, $a=\infty$, $a=\infty$.

Procuriamo d'interpretare le risoluzioni

$$a=o, \quad a=\infty$$

che sembrano estranee al proposto quesito. A tale oggetto osserveremo che, prendendo un punto N' (fig. 43) posto fuori del cerchio e tale che le perpendicolari calate da questo punto sopra l'asse delle x e delle y, incontrino la curva nei punti i, i', l, l', volendo poi esprimere che, due valori di x dei punti d'intersecazione della curva con la retta condotta dal punto N', sono eguali, senza proferir cosa alcuna della y, questa condizione non conviene maggiormente alle due tangenti N'm, N'm' che possono condursi da questo punto, che alla retta N'ii' normale all'asse delle x. E perciò l'analisi deve fornirci, oltre le risoluzioni relative alle due tangenti, anche la risoluzione $a=\infty$ che corrisponde a questa normale.

In fatti la (2), che si riduce ad

$$x=\frac{y-y'}{a}+x';$$

ci dà, per $a=\infty$, $x=x'$, ciò che niente ci dice riguardo ad y. Ma per averne il valore, basta di risalire alla equazione (1) che ci dà

$$y=\pm\sqrt{(r^2-x'^2)}.$$

Tali sono infatti i valori di Op, ip, $i'p$ corrispondenti ad N' e i'.

In simil guisa, per esprimere che i due valori di y sono eguali, niente dicendo riguardo ad x, questa condizione non solo conviene alle due tangenti, ma ancora alla retta $N'\,ll'$ parallela all'asse delle x. Perciò l'analisi deve darci unitamente le risoluzioni relative alle due tangenti, e la risoluzione $a=o$ corrispondente ad $N'\,l\,l'$.

L'equazione (2) ci dà $a=o$, $y=y'$, ciò che niente ci dice riguardo ad x. Ma dalla equazione (1) si deduce

$$x=\pm\sqrt{(r^2-x'^2)}.$$

Tali sono in fatti i valori di Oq, Oq', lq, $l'q'$.

Concludiamo da ciò che, per esprimere il contatto di una retta con una curva, conviene *scrivere analiticamente le due condizioni riunite affinchè due dei valori di x, e due dei valori di y, corrispondenti ai punti d'intersecazione, siano eguali; poi deve considerarsi a parte la relazione comune che trovasi implicitamente contenuta nelle due relazioni generali stabilite prima separatamente.*

Questa osservazione ci presenta un nuovo esempio di un quesito le di cui equazioni sono più gegenerali dello stesso quesito, ed il mezzo di render libero il risultato dalle estranee risoluzioni.

68. Abbiamo creduto di dover risolvere il problema delle tangenti nella maniera la più generale, affine di far vedere ai giovani studenti come debbano interpretare certi risultati dell' analisi. Ma siccome avremo spesso bisogno di richiamare l'equazione della tangente, nel caso particolare in cui sia dato il punto di contatto, sarà bene d' indicare un mezzo diretto per giungervi. Anche questo metodo è suscettibile egualmente di essere applicato a tutte le curve, qualunque siasi l' inclinazione degli assi.

Chiameremo (x', y'), (x'', y'') le coordinate dei due punti della curva, uno de' quali (x'', y'') deve divenire un punto di contatto.

La retta, che unisce questi due punti, ha per equazione

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x') \quad . \; . \; . \quad (1)$$

e riunendo le relazioni $\left\{ \begin{array}{ll} y'^2+x'^2=r^2 & . \; . \; . \; . \; (2) \\ y''^2+x''^2=r^2 & . \; . \; . \; (3), \end{array} \right.$

avremo un sistema di tre equazioni che conviene alla secante condotta per i due punti.

Ora, sottraendo la (3) dalla (2), avremo

$$y'^2-y''^2+x'^2-x''^2=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (4),$$

equazione che può sostituirsi ad una delle due precedenti, per esempio alla (3); e siccome la relazione (4) si riduce a

$$(y'+y'')(y'-y'')+(x'+x'')(x'-x'')=0, \text{ onde}$$

$$\frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{x'+x''}{y'+y''};$$

e perciò la secante verrà finalmente rappresentata dal sistema delle due equazioni.

$$y-y'=-\frac{x'+x''}{y'+y''}(x-x') \text{ ed } y'^2+x'^2=r^2.$$

Se ora si volesse che la secante divenisse tangente, cioè, che i due punti d' intersecazione si riunissero in uno, basterebbe stabilire

$$x'=x'' \text{ ed } y'=y'';$$

ciò che ci dà,

$$y-y''=-\frac{x''}{y''}(x-x'') \text{ ed } y''^2+x''^2=r^2.$$

(Non si suol considerare che la prima di queste equazioni per rappresentar la tangente, ma la seconda è sempre sottintesa).

N. B. L' artificio del calcolo impiegato poc' anzi, consistendo nel sottrarre la (3) dalla (2), ha per iscopo di trasformare il coefficiente $\frac{y'-y''}{x'-x''}$ della (1), per introdurvi poi le due condizioni

$$y'=y'', \quad x'=x'';$$

poichè se, prima di questa trasformazione, si facesse questa doppia ipotesi, si otterrebbe $\frac{o}{o}$ per valore di questo coefficiente.

69. L' equazione $y-y''=-\frac{x''}{y''}(x-x'')$ può ridursi ad una forma molto più semplice, per mezzo della relazione $y''^2+x''^2=r^2$ che vi è congiunta.

Togliendo il denominatore e trasportando, abbiamo,

$$yy''+xx''=y''^2+x''^2, \text{ o, } yy''+xx''=r^2.$$

Questa nuova forma è facile a ritenersi, deducendosi da quella del cerchio $y^2+x^2=r^2$, col sostituire i quadrati y^2 ed x^2 ai rettangoli yy'' ed xx''.

Se nella equazione semplificata della tangente, si farà $y=o$; avremo $x=\frac{r^2}{x''}$, e questa è l'ascissa OR del punto ove la tangente incontra l' asse delle x.

Per altra parte abbiamo, dalla figura,

$$PR=OR-OP \text{ ; onde } PR=\frac{r^2}{x''}-x''=\frac{r^2-x''^2}{x''}.$$

Questa distanza PR, compresa fra il piede dell' ordinata del punto di contatto ed il punto ove la tangente incontra l' asse delle x, è ciò che chiamasi *sottotangente*; e la sua considerazione è utile bene spesso nella teoria delle curve.

N. B. Poichè si ottiene il suo valore supponendo $y=o$ nella equazione semplificata della tangente e sottraendo poi x'' dal valore di x corrispondente ad $y=o$, ne siegue che, per averlo direttamente dalla equazione non semplificata della tangente, basta di farvi $y=o$, e di cercare il valore corrispondente di $x-x''$.

Si trova, in fatti, per

$$y=o,\ x-x''=\frac{y''^2}{x''}=\frac{r^2-x''^2}{x''}$$

70 Riprendiamo in egual modo il caso ove la tangente dev' essere condotta da un punto preso fuori del cerchio; e proponiamoci di esprimere le coordinate incognite x'', y'' del punto di contatto, in funzioni delle coordinate x', y' del punto dato.

La tangente, dovendo passare per il punto x', y', avrà un equazione della forma $y-y'=a(x-x')$; avendo a (§ 66) per valore, $a=-\frac{x''}{y''}$; ed il

quesito ha per oggetto di determinare x'' ed y''.

Ora l' equazione della tangente essendo parimenti (§ 69) $yy''+xx''=r^2$, siccome questa retta passa per il punto x' y', avremo necessariamente la relazione $y'\,y''+x'x''=r^2$ . . . . (1)

Altronde, trovandosi il punto x'' y'', sulla curva, abbiamo anche $y''^2+x''^2=r^2$ . . . . (2)

Col mezzo di queste equazioni siamo abilitati a calcolare x'' ed y''.

Dalla prima si deduce, $y''=\dfrac{r^2-x'x''}{y'}$ . . . (3), sostituendo questo valore di y'' nella (2) ed ordinando rapporto ad x,

$(x'^2+y'^2)x''^2-2r^2x'\,x''=r^2y'^2-r^4$ o, risolvendo e simplificando $x''=\dfrac{r(rx'\pm y'\sqrt{(x'^2+y'^2-r^2)}}{x'^2+y'^2}$

Nella (3) sostituiremo ad x'' questo suo valore, ed otterremo, a riduzione effettuata,

$$y''=\frac{r(ry'\mp x'\sqrt{(x'^2+y'^2-r^2)}}{x'^2+y'^2}.$$

Dunque $a=\dfrac{x''}{y''}=\dfrac{rx'\pm y'\sqrt{(x'^2+y'^2-r^2)}}{\sqrt{y'}\mp x'\sqrt{(x'^2+y'^2-r^2)}}$.

Per provare l' identità di questo risultato con quello del n.° 66, moltiplichiamo sopra e sotto per

$$ry'\pm x'\sqrt{(x'^2+y'^2-r^2)},$$

osservando che i segni superiori si corrispondono, come anche i segni inferiori; ed avremo

$$a=\frac{r^2x'y'\pm\sqrt{(y'^2+x'^2)}\sqrt{(x'^2+y'^2-r^2)}+y'x'(x'^2+y'^2-r^2)}{r^2y'^2-x'^2(x'^2+y'^2-r^2)}.$$

$$\text{o } a=\frac{x'y'(x'^2+y'^2)\pm r(x'^2+y'^2)-\sqrt{(x'^2+y'^2-r^2)}}{(x'^2+y'^2)(r^2-x'^2)}.$$

o finalmante $a = \frac{(x'y' \pm r\sqrt{(x'^2+y'^2-r^2)}}{r^2-x'^2}$.

71. Se si volesse fissare geometricamente la posizione del punto (x'', y''), converrebbe costruire i valori qui sopra ottenuti. Ma, questi essendo complicatissimi, ci prevarremo dei principj riguardanti i luoghi geometrici (§ 51).

Prima costruzione. Riprendiamo le equazioni

$$y'y''+x'x''=r^2 \; , \; . \; . \; . \; (1)$$

$$y''^2+x''^2=r^2 \; , \; . \; . \; . \; (2)$$

che hanno servito a determinare x'', y''.

Sottraendo la (1) dalla (2) si ottiene

$$y''^2-y'y''+x''^2-x'x''=o \; . \; . \; . \; (3)$$

equazione da potersi sostituire alla prima; e se si costruirà, rapporto alli stessi assi, la (2) e la (3), riguardate come contenenti due variabili x'', y'', i punti d' intersecazione dei due luoghi geometrici saranno i richiesti punti di contatto.

Primieramente l' equazione (2) rappresenta un cerchio avente il suo centro all' origine, ed r per raggio (fig. 44); il cerchio è dunque già costruito.

In quanto alla equazione (3), che è compresa nella forma generale del n.° 47, potendo ridursi alla seguente

$$(y''-\frac{y'}{2})^2+(x''-\frac{x'}{2})^2=\frac{y'^2+x'^2}{4};$$

rappresenta una circonferenza il di cui centro ha per coordinate $\frac{x'}{2}$, $\frac{y'}{2}$, ed ha per raggio $\frac{1}{2}\sqrt{(x'^2+y'^2)}$

Ora, unendo il punto O con il punto N, dal quale ci proponiamo di condurre una tangente, avremo evidentemente

OL, o $\frac{OP}{2}=\frac{x'}{2}$, $IL=\frac{NP}{2}=\frac{y'}{2}$, $OI=\frac{1}{2}\sqrt{(x'^2+y'^2)}$.

Dunque la circonferenza descritta sopra ON come diametro è il luogo geometrico dell'equazione (3).

Perciò, i punti M, M', ove le due circonferenze si tagliano, sono i punti di contatto; e questi uniti con il punto N ci danno le due ricercate tangenti.

Questa costruzione è analoga a quella che si trova effettuata nel t.° 2.° § 48.

72. *Seconda costruzione.* Possiamo operare direttamente sopra le equazioni (1) e (2), la costruzione delle quali dà luogo ad una proprietà molto rimarchevole.

L'equazione (2) rappresenta sempre il cerchio dato.

L'equazione (1), essendo di 1.° grado in x'', y'', rappresenta una linea retta; e siccome i punti, ove essa deve incontrare la circonferenza, altro non sono che i punti di contatto, ne siegue che questa retta sia la *linea di congiunzione dei punti di contatto.*

Per fissarne la posizione, si faccia successivamente nella equazione (1) $y''=o$, ed $x''=o$,

ne risulta $\begin{cases} \text{per } y''=o, \; x''=\frac{r^2}{x'}, \\ \text{per } x''=o, \; y''=\frac{r^2}{y'}, \end{cases}$

Il primo punto $y''=o$, $x''=\frac{r^2}{x'}$, è il punto B (fig. 45) ove la retta incontra l'asse delle x, e questo punto si ottiene colla costruzione della 3.za proporzionale $x' : r :: r : x''$.

Il secondo punto $x''=o$, $y''=\frac{r^2}{y'}$, è il punto C

ove la retta incontra l'asse delle y, e si ottiene nella medesima maniera.

La retta BC, che unisce questi due punti, incontra la circonferenza nei punti M ed M' che sono i punti di contatto delle tangenti condotte dal punto N.

73. *Osservazione*. Siccome il valore $x''=\frac{r^2}{x'}$,

corrispondente ad $y''=o$, nella equazione della linea di congiunzione dei due punti di contatto, è indipendente dall'ordinata y' del punto dal quale vogliono condursi le due tangenti, può concludersi che, per un secondo punto qualunque N' preso sopra la perpendicolare LL', la linea che unisce i punti di contatto delle tangenti condotte da questo punto, incontra l'asse delle x nello stesso punto B.

In fatti, siano x' ed y, le coordinate del punto N'; per l'equazione della linea M'' M''' sarebbe, $y, y''+x'x''=r^2$; o facendo $y''=o$, si troverebbe

$$x''=\frac{r^2}{x'}=\text{OB}.$$

Potremo perciò stabilire il seguente teorema:

Se dai diversi punti di una retta indefinita LL' si conduchino le tangenti ad un cerchio, tutte le rette, che congiungono i punti di contatto delle due respettive tangenti che partono si riuniscono in un punto comune B da uno stesso punto; punto che si trova situato sulla normale calata dal centro O sulla retta LL'.

N. B. Dalla espressione $x''=\frac{r^2}{x'}$ risulta che, ogni

qual volta la retta LL', sia esteriore al cerchio nel qual caso abbiamo $x'>r$, il punto B è interiore, poichè allora è $x''<r$.

Se, al contrario, LL' (fig. 46) è secante alla curva, il punto B è esteriore; poichè abbiamo, in

tal caso, $x'<r$, onde $\frac{r^2}{x'}$ o $x''>r$.

I problemi che sieguono hanno relazione con quelli delle tangenti, e la loro discussione ci presenta alcune circostanze di molto rilievo.

74. 1.° *Dato un cerchio* OAMB (fig. 47.) *ed un punto* N, *debba da questo punto condursi una retta in modo che la parte* MM' *intercettata da cerchio sia eguale ad una retta data* $2m$.

Supponiamo riferito il cerchio a due assi rettangolari OX, OY, e chiamiamo x', y' le coordinate del punto N. Indichiamo altronde con z la distanza di questo punto da uno dei punti d'intersecazione della linea cercata con la circonferenza.

Avremo le equazioni

$$x^2+y^2=r^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$y-y'=a(x-x'), \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$z^2=(x-x')^2+(y-y')^2 \quad . \; . \; . \; (3)$$

(Quì $x-x'$, $y-y'$ esprimono le differenze fra le coordinate del punto N e le coordinate x, y atte a verificare nel tempo stesso le equazioni (1) e (2) che sono quelle del cerchio e della retta).

Ciò premesso per risolvere il quesito proposto; elimineremo prima x ed y fra queste tre equazioni per avere un'equazione in z, a, x', y', r. Risolvendo questa equazione rapporto alla z, otterremo due valori, la di cui differenza, fatta eguale a $2m$, ci condurrà ad un'ultima equazione in a ed in quantità cognite x', y', r, m, e risoluta farà conoscere a, e fisserà perciò la posizione della retta cercata. Conduciamo ad effetto tutti questi calcoli.

Se nella (3) si sostituisce ad $y-y'$ il suo valore dedotto dalla (2), si ottiene $z^2=(x-x')^2(1+a^2)$; d'onde si deduce.

$$x-x'=\frac{z}{\sqrt{(1+a^2)}} \text{ ed } x=x'+\frac{z}{\sqrt{(1+a^2)}}$$

dunque $y-y'=\frac{az}{\sqrt{(1+a^2)}}$, ed $y=y'+\frac{az}{\sqrt{(1+a^2)}}$.

Sostituendo questi due valori nella (1), e ordinando rapporto a z si ottiene

$$z^2+2\frac{ay'+x'}{\sqrt{(1+a^2)}}.\ z+x'^2+y'^2-r^2=0 \ldots . (4); \text{ onde}$$

$$z=-\frac{ay'+x'}{\sqrt{(1+a^2)}}\pm\frac{1}{\sqrt{(1+a^2)}}\sqrt{[(r^2-x'^2)a^2+2ay'x'+r^2-y'^2]}$$

Denominiamo z', z'', le distanze NM, NM', che altro non sono che i due valori ora trovati per z. Avremo

$$z'-z''=\frac{2}{\sqrt{(1+a^2)}}.\sqrt{[(r^2-x'^2)a^2+2ay'x'+r^2-y'^2]}:$$

ma dev' essere, per ipotesi, $z'-z''=2m$.

Dunque otterremo finalmente per l'equazione del problema

$$m\sqrt{(1+a^2)}=\sqrt{[(r^2-x'^2)a^2+2ay'x'+r^2-y'^2]},$$

o, innalzando al quadrato, e ordinando rapporto ad a

$$(x'^2+m^2-r^2)a^2-2x'y'.a+y'^2+m^2-r^2=0 \ldots . (5).$$

Da questa equazione di secondo grado ne siegue che dal punto N possano condursi due rette NM, NM', soddisfacenti egualmente al quesito.

N. B. Il problema delle tangenti può riguardarsi come un caso particolare di questo. In fatti, per fissare che la retta condotta dal punto N è tangente della curva, basta esprimere che la parte MM' o M''M''' della secante è *nulla*, cioè che abbiamo $m=0$; lo che riduce l'equazione (5) a quest' altra:

$$(x'^2 - r^2)a^2 - 2x'y'.a + y'^2 - r^2 = o ;$$

risultato identico con quello già ottenuto (§ 66).

75. Per simplificare la costruzione dei valori della (5), supponiamo, ciò che è lecito; che l'asse delle x passi per il punto dato N (fig. 48).

In tal caso, abbiamo $y' = o$, e l'equazione diviene

$$(x'^2 + m^2 - r^2)a^2 = r^2 - m^2 \text{ ; onde}$$

$$a = \frac{\pm\sqrt{(r^2-m^2)}}{\sqrt{(x'^2+m^2-r^2)}} = \frac{\pm h}{\sqrt{(x'^2-h^2)}} ,$$

(facendo $\sqrt{(r^2-m^2)} = h$).

Ad oggetto che questa espressione di a sia reale, conviene *primieramente* che sia $m<r$, o $2m<2r$; ciò che dev' essere, poichè $2m$ rappresenta una delle corde del cerchio dato.

Secondariamente, $x'^2 - h^2$ o $x'^2 - r^2 + m^2 > o$, onde $m > \sqrt{(r^2 - x'^2)}$.

Quest' ultima condizione resta sempre adempita finchè il punto N sia esteriore al circolo; poichè è allora $x' > r$, e perciò a *forziori*, $x'^2 - r^2 + m^2 > o$.

Ma se il punto N (fig. 49) fosse interiore; siccome, guidando NK perpendicolare ad OX, abbiamo $NK = \sqrt{(r^2 - x'^2)}$, ne siegue che la retta data $2m$ debba essere minore della corda KK'; ed in fatti questa corda è la più piccola di tuttte quelle che possono condursi per il punto N nel cerchio dato.

Supponendo che le due condizioni $m<r$,

$$m > \sqrt{(r^2 - x'^2)}$$

restino soddisfatte, si effettui la costruzione del problema.

Descriviamo sopra OB (fig. 48) una semi-circonferenza, e prendiamo, partendo dal punto B: una corda BI eguale ad m; ne risulta

$$OI = \sqrt{(r^2 - m^2)} = h.$$

Frattanto, sopra $ON=x'$ descriviamo una semicirconferenza, e portiamo OI da O in L, e poi tiriamo la retta NL. Si deduce da ciò

$$NL=\sqrt{(x'^2-h^2)}.$$

È poi facile lo scorgere che questa retta NLM, e la retta NL'M' situata simetricamente sotto OX, rappresentino le due rette cercate. Poichè il triangolo rettangolo OLN ci dà la tangente

$$LNO=\frac{OL}{NL}=\frac{h}{\sqrt{(x'^2-h^2)}},$$

$$\text{onde tang. } LNX=\frac{h}{\sqrt{(x'^2-h^2)}}$$

$$\text{similmente tang. } L'NO=\frac{+h}{\sqrt{(x'^2-h^2)}}.$$

Ha luogo la medesima costruzione quando il punto N è interiore (fig. 49). Soltanto che la corda BI o m dev' essere minore di BO o di r, e maggiore di NIL o di $\sqrt{(r^2-x'^2)}$, atteso quanto si è detto di sopra.

76. *Osservazione*. L' equazione (4) alla quale ci ha condotti la risoluzione del problema precedente (ved. n.° 74) dimostra con la massima semplicità che *due secanti sono reciprocamente proporzionali alle loro parti esteriori*, ovvero, che *due corde si tagliano in parti reciprocamente proporzionali*, secondo che il punto N è esteriore o interiore al cerchio.

In fatti, si sà che, l' ultimo termine di qualunque equazione di secondo grado è eguale al prodotto delle due radici (t.° 1.° p. 182). Avremo dunque, chiamando z', z'' (fig. 47) le radici dell' equazione (4) (n.° praeced.),

$$Z'\times Z'', \text{ o } NM\times NM'=x'^2+y'^2-r^2.$$

Il secondo membro di questa relazione essendo indipendente da a, cioè dalla costante che fissa l' inclinazione della retta NM, ne siegue che essa debba conservarsi la stessa per qualunque altra secante NR condotta dal punto N. Deriva di quì la

$$NM \times NM' = NR \times NR',$$

e perciò, $NM : NR :: NR' : NM'$.

(proprietà già dimostrata in Geometria t.° 2.° § 50)

Che se il punto sarà interiore al cerchio, come N', avremo egualmente

$$N'M \times N'M' = N'S \times N'S',$$

e perciò, $N'M : N'S :: N'S' : N'M'$.

Il caso in cui il punto è esteriore vien caratterizzato (§ 66) dalla condizione $x'^2 + y'^2 - r^2 > o$, cioè dalle due radici positive; ed il caso del punto interiore, lo è dalla condizione $x'^2 + y'^2 - r^2 < o$; ed in fatti, le due radici rappresentate geometricamente da N'M ed N'M' devono essere di segno contrario.

77. 2° *Dati due cerchj sopra un piano, condurre una retta a traverso, in modo che le parti*, MM', NN' (fig. 52), *intercettate dalle due circonferenze, siano eguali fra loro, e ad una linea data* $2m$.

Vengano riferiti i cerchj a due assi rettangolari, uno de' quali sia la linea dei centri, e passi l' altro per il centro di uno dei due.

Prolunghiamo poi la retta cercata MN' fino che s' incontri in A con la linea OO'. È evidente che questa retta MN' avrebbe una posizione determinata se si conoscesse la distanza OA; poichè allora tutto consisterebbe nel condurre dal punto A una retta AM tale che fosse

$$MM' = 2m,$$

ed il quesito sarebbe allora ridotto al precedente.

Ciò posto, siano

$$OA=x', \; OO'=d; \; \text{onde } O'A=x'-d;$$

facciamo poi $OB=r$, $O'B'=r'$, è chiamiamo A la tangente dell'angolo che forma AM con l'asse delle x.

Abbiamo trovato (§ 75)

$$a=\frac{\pm h}{\sqrt{(x'^2-h^2)}} \quad \text{essendo } h=\sqrt{(r^2-m^2)}.$$

Per altra parte, chiamando a' la tangente dell'angolo che forma con OX una retta AN che soddisfi, rapporto al secondo cerchio, alla stessa condizione

$$NN'=2m,$$

e, indicando O'A o $x'-d$ con x'', e $\sqrt{(r'^2-m^2)}$ con h', avremo similmente,

$$a'=\frac{\pm h'}{\sqrt{(x''^2-h'^2)}}=\frac{\pm h'}{\sqrt{[(x'-d)^2-h'^2]}}.$$

Ma; dalla enunciazione del quesito, le rette AM, AN devono formarne una sola; e perciò dev' essere $a'=a$, ciò che ci fa ottenere per equazione del problema proposto,

$$\pm\frac{h}{\sqrt{(x'^2-h^2)}}=\frac{\pm h'}{\sqrt{[(x'-d)^2-h'^2]}}$$

o, togliendo i denominatori ed innalzando al quadrato,

$$h^2[(x'-d)^2-h'^2]=h'^2(x'^2-h^2),$$

o, sopprimendo il termine comune $-h^2h'^2$,

$$h^2(x'-d)^2=h'^2x'^2.$$

Da questa equazione si deduce,

$$h(x'-d)=\pm h'x', \text{ cioè } x'=\frac{hd}{h\mp h'},$$

e, sostituendo ad h ed h' i loro valori,

$$x'=\frac{d\sqrt{(r^2-m^2)}}{\sqrt{(r^2-m^2)}\mp\sqrt{(r'^2-m^2)}}$$

Questo doppio valore di x' prova in generale, che esistono due punti A ed A', da ciascuno de' quali possono condursi due rette capaci di soddisfare al quesito; ciò che ci dà in tutto *quattro* diverse risoluzioni AM ed Am, RA'S ed rA'S.

Non ci tratterremo da vantaggio su questo problema, la di cui costruzione e discussione risulteranno colla massima semplicità da quella del problema che siegue

78. 3.° *Condurre una tangente comune a due cerchj dati.*

Facciasi nel precedente problema, $m=o$, ciò che fissa la condizione che la retta cercata sia tangente ad ambedue i cerchj. Siccome abbiamo allora

$$h \text{ o } \sqrt{(r^2-m^2)}=r, \text{ ed } h'=\sqrt{(r'^2-m^2)}=r'.$$

il doppio valore di x' riducesi ad

$$x'=\frac{dr}{r\mp r'}.$$

L' espressione che corrisponde al segno superiore, essendo evidentemente maggiore della seconda, corrisponde al caso in cui i cerchj sono situati da uno stesso lato riguardo alla tangente; e, quella che corrisponde al segno inferiore, conviene al caso in cui i cerchj sono situati in lati diversi. Si dice nel primo caso, che la tangente è *esteriore* ai due cerchj, e nel secondo che è essa *interiore*.

Per costruire il risultato $x'=\frac{dr}{r-r'}$, o (fig. 51.), $r-r':r::d:x'$, conducasi una linea indefinita OL; e presa sopra questa retta, partendo dal punto K una parte KH eguale ad O' B' o r', avremo così

$$OK=r,\ OH=r-r'.$$

Uniti i punti H ed O', si conduca dal punto K la KA parallela ad HO', il punto A sarà il richiesto: Poichè abbiamo

$$OH:OK::OO':OA,\ \text{o}\ r-r':r::\ d:OA;\ \text{cioè}\ OA=x^{t}$$

Di altro più non si tratta che di condurre dal punto A le due tangenti ANM, Anm al primo cerchio, che tali sono necessariamente al secondo.

In quanto all'altro risultato $x^{t}=\frac{dr}{r+r^{t}}$

o $\qquad r+r' :r::\ d:\ x',$

basta *prendere sulla stessa linea* OL, *una parte* H'K *eguale ad* O'B'; ciò che ci dà $OH^{t}=r+r'$. Guidando poi H'O' e KA' parallela a H'O', avremo in A' una seconda risoluzione del quesito; cioè, se dal punto A' si guidino le A'M' ed A'm' tangenti al primo cerchio, lo saranno esse egualmente al secondo.

La costruzione del precedente problema si deduca facilmente da quella dal problema che siegue.

In fatti, se s' inscrivano ai cerchj dati due corde CD, cd, (fig. 50) eguali a $2m$, e dai punti O, O' si delineino due circonferenze con i raggi eguali alle normali calate sopra queste corde, è evidente che le tangenti comuni a questi nuovi cerchj saranno tali che le parti MM', NN' ed RR', SS', intercettate dai due primi saranno eguali a CD o $2'm$.

La discussione di questo problema presenta diverse circostanze che meritano di essere sviluppate. Desa completerà quanto fu detto nel primo capitolo nel discutere alcuni problemi generali.

79. Consideriamo i due cerchj in tutte le situazioni che può aver l' uno rapporto all' altro, supponendo sempre che il cerchio del maggior raggio sia quello che ha il centro a sinistra; perchè le circostanze relative all' ipotesi contraria sarebbero del tutto simili.

1.° *Siano i cerchj affatto esteriori fra loro* (fig. 54).

Questa circostanza è espressa analiticamente dalla condizione $d>r+r'$, d'onde, a *forziori*, $d>r-r'$.

In questo caso, l'espressione $x'=\frac{dr}{r-r'}$ che, colla divisione, può aver la forma $x'=d+\frac{dr'}{r-r'}$, è evidentemente maggiore di $d+r'$ o di OB'. Dunque il punto A corrispondente a questo valore di x' è esteriore all'uno e all'altro cerchio, e le due tangenti esteriori possono delinearsi.

L'espressione $x'=\frac{dr}{r+r'}$, è primieramente maggiore di r o di OB (perchè $d>r+r'$).

Altronde può ricever la forma $x'=d-\frac{dr'}{r+r'}$ e dall'esser $d>r+r'$, ne risulta $\frac{dr'}{r+r'}>r'$; dunque x' è minore di $d-r'$, o minore di OC'. Percio il punto A', corrispondendo al secondo valore di x' si conserva ancora esteriore ai due cerchj, e ci abilita a condurre le due tangenti *interiori*.

La prima circonstanza offre dunque quattro risoluzioni.

Nel caso particolare di $r=r'$ (fig. 53) l'espressione $x=\frac{dr}{r+r'}$ si riduce ad $x'=\frac{d}{2}$; cioè il punto A' è il mezzo della distanza OO' dei due centri.

L'espressione $x'=\frac{dr}{r-r'}$ diviene $\frac{dr}{o}$ o infinita; e ciò significa che le due tangenti esteriori sono parallele alla linea dei centri.

Questi risultati ricevono dalla figura una facile spiegazione.

2.° *I cerchj possono toccarsi esteriormente*; o, in linguaggio analitico, può aversi (fig 54)

$$d=r+r'\text{; cioè } d>r-r',$$

Il valore $x'=\frac{dr}{r-r'}=d+\frac{dr'}{r-r'}$, è maggiore di $d+r'$ o di OB'. Perciò esistono le due tangenti esteriori, essendo il punto A esteriore ai due cerchj.

Ma il valore $x'=\frac{dr}{r+r'}$, riducendosi ad $x'=r$, ci prova che le tangenti interiori si confondeno in una sola LL'

Il problema non ammette dunque allora che *tre* risoluzioni.

3.° *I cerchj possono tagliarsi.* Questa circostanza viene espressa (§ 55) dalle due condizioni

$$d<r+r',\ d>r-r'.$$

L' espressione $x'=\frac{dr}{r-r'}=d+\frac{dr'}{r-r'}$ è maggiore di $d+r'$ o di OB'; perciò esistono le due tangenti esteriori.

Ma l' espressione $x'=\frac{dr}{r+r'}$ è minore di r; dunque il punto A' è interiore al cerchio che ha il centro in O; perciò non possono condursi le tangenti interiori.

Il quesito non ammette dunque, in questo caso, che *due* risoluzioni.

4.° *I cerchj possono toccarsi interiormente*; ciò che esige che sia, (fig 56), $d=r-r'$, cioè

$$d<r+r'.$$

Il primo valore $x'=\frac{dr}{r-r'}$ si riduce ad $x'=r$

o $x'=$OB; dunque le due tangenti esteriori si confondono in una sola LL'.

Il secondo $x'=\frac{dr}{r+r'}$ è minore di r, attesochè

$$d<r+r';$$

dunque non esistono tangenti interiori. E percio il quesito non è capace che di *una sola* risoluzione.

5.° Finalmente, *i cerchj possono essere interiori l'uno all'altro senza toccarsi*. Questa circostanza è espressa da $d<r-r'$, ed, *a forziori*, $d<r+r'$.

I due valori $x'=\frac{dr}{r-r'}$, $x'=\frac{dr}{r+r'}$ (fig. 57)

sono ambedue minori di r. Perciò, in questo caso, non vi è alcuna risoluzione possibile. Il § 79 può riguardarsi come una estesa dimostrazione di quanto fu accennato in Geometria (t.ª 2.ª § 54).

Deve rimarcarsi che le circostanze nelle quali cessa il problema di ammettere quattro risoluzioni, non corrispondono a verun risultato algebrico che sia assurdo in se stesso, come lo sono le espressioni imaginarie nelle equazioni di secondo grado. Ciò proviene perchè il problema proposto dipende da un altro (*condurre per un punto dato una tangente ad un cerchio*), il quale, per esser suscettibile di risoluzione, esige già (§ 66) che i dati sodisfino a certe condizioni.

La discussione del problema § 77 coincide con questa, con la sola differenza che ai raggi r, r' devono essere sostituite le quantità h, h',

$$\text{o } \sqrt{(r^2-m^2)},\ \sqrt{(r'^2-m^2)}.$$

Queste ultime due espressioni provano che bisogna primieramente che sia m minore del più piccolo dei raggi r ed r'. E questa è una condizione che deve aggiungersi a quella della precedente discussione

80. Per esercizio di calcolo ci proporremo di trovare la dimostrazione del seguente teorema:

Tre circonferenze di cerchio essendo delineate sopra un piano, se, riguardandole due a due, si condurranno loro delle tangenti comuni tanto esteriori che interiori; i punti d' incontro di queste tangenti con le linee dei centri saranno tre a tre in linea retta.

Siano O, O', O'' (fig. 58) i centri delle tre circonferenze; A, A', A'', a, a', a'' i punti ove le tangenti esteriori ed interiori tagliano le linee dei centri: 1.° A, A', A'' sono in linea retta; 2.° lo stesso accade di

$$A,\ a'',\ a' \ \Big|\ A',\ a'',\ a \ \Big|\ A'',\ a',\ a.$$

Ecco gli elementi necessarii per risolvere il quesito.

Denominando r, r', r'' i raggi rispettivi dei cerchj che hanno i centri in O, O', O'', e d, d', d'' le distanze OO', OO'', O'O'', si è trovato (§ 78).

$$OA = \frac{dr}{r-r'},\ \text{onde}\ O'A = \frac{dr}{r-r'} - d = \frac{dr'}{r-r'};$$

$$Oa = \frac{dr}{r+r'},\ \text{onde}\ O'a = d - \frac{dr}{r+r'} = \frac{dr'}{r+r'}.$$

Così si troverebbe

$$OA' = \frac{d'r}{r-r''},\ O''A' = \frac{d'r''}{r'-r''},\ Oa' = \frac{d''r'}{r+r''},\ O''a' = \frac{d'r''}{r+r''},$$

ed

$$O'A'' = \frac{d''r'}{r'-r''},\ O''A'' = \frac{d''r''}{r'-r''},\ O'a'' = \frac{d''r'}{r'+r''},\ O''a'' = \frac{d''r''}{r'+r''}.$$

Con questi dati potrà fissarsi la posizione dei punti A, A', A'', a, a, a'', rapporto ai due assi per poi dedurre (§ 27) i rapporti delle differenze fra le coordinate di questi punti. Osserveremo tuttavia cha la scelta degli assi non si rende indifferente alla semplicità dei calcoli. Dalla figura viene indicato uno dei sistemi più convenevoli; l'asse del-

le ascisse è la linea dei centri OO′, e l'asse delle ordinate, una parallela ad O′O″, condotta dal punto esteriore A.

Basta, infatti, di dimostrare la proposizione per i punti A, A′, A″, ed a, a', a''; ciò che può farsi, provando che

$$\frac{A'P'}{AP'}=\frac{A''O'}{AO'} \quad \text{ed} \quad \frac{a'p'}{Ap'}=\frac{A''O'}{AO'}$$

81. Daremo fine a questo capitolo con la risoluzione di alcuni problemi indeterminati.

Problema 1.° Dati due punti A *e* B, *si richiede un terzo punto* M (fig. 59) *tale, che unendolo coi punti* A *e* B, *la somma dei quadrati delle distanze* AM, BM *sia eguale ad un quadrato dato* m^2.

Primieramente è evidente che il quesito è *indeterminato*, poichè chiamando z, z' le distanze AM, BM, si ha per unica condizione $z^2+z'^2=m^2$.

Ciò posto, diamo a z un qualunque valore a, e ne risulterà per z' il valore corrispondente

$$z'=\sqrt{(m^2-a^2)};$$

e se dal punto A come centro con un raggio eguale ad a si descriverà una circonferenza, e dal punto B come centro, con un raggio eguale a

$$\sqrt{(m^2-a^2)},$$

si descriva un' altra circonferenza, i punti M, M′ ove queste due circonferenze si tagliano, soddisfano alla enunciazione del quesito.

Sia ancora $z=a'$, per dedurne l'equazione

$$z'=\sqrt{(m^2-a'^2)},$$

ed ottenere due nuovi punti M″, M‴; e così in seguito. D'onde si vede che esiste una infinità di punti capaci di verificare l'esposizione.

Si rileva nel tempo stesso che il luogo geometrico

di tutti questi punti è una curva *limitata in tutti i sensi*; poichè l' addotta equazione dandoci $z=\sqrt{(m^2-z'^2)}$, e $z'=\sqrt{(m^2-z^2)}$, ne siegue che veruna distanza z, z' possa essere maggiore di m

Deve adesso trovarsi l' *equazione di questa curva*, cioè (§ 41) *una relazione fra le coordinate di ciascuno di questi punti riferiti a due assi fissi*.

Ma per la scelta del sistema più semplice, faremo una nuova osservazione, cioè che questa curva è *simetrica* rapporto ad AB ed alla perpendicolare OC innalzata dal punto medio O di questa retta.

Ciò è evidente riguardo ad AB, attesa la costruzione indicata poc' anzi, poichè i punti M ed M' restano situati nella stessa perpendicolare ad AB, e ad egual distanza da AB.

In quanto ad OC, siano due punti M ed M'' situati in una stessa retta MM'' perpendicolare ad OC, e tali che sia MQ=M''Q.

Si conducano le perpendicolari MP, M''P''. Siccome OP=OP'' ed AO=OB, ne risulta AP=BP''; abbiamo poi MP=M''P''; e perciò i due triangoli rettangoli APM, BP''M'' sono eguali, e danno AM=BM''. Si proverebbe egualmente che BM=AM''.

Dunque se $\overline{AM''}^2+\overline{BM}^2=m^2$, dovrà essere ancora $\overline{AM''}^2+\overline{BM''}^2=m^2$.

Dopo ciò, prenderemo per sistema d' assi le rette AB ed OC.

Chiamiamo x ed y le coordinate di un qualunque punto M della curva, $2a$ la distanza AB, onde $OA=BO=a$.

I due triangoli rettangoli APM, BPM ci danno

$$y^2+(x+a)^2=z^2 \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$y^2+(x-a)^2=z'^2 \quad . \; . \; . \; (2).$$

Abbiamo poi già trovato fra z e z' la relazione

$$z^2+z'^2=m^2 \ldots (3);$$

e se, fra queste tre equazioni che esistono per qualunque punto della curva, si elimini z e z', l' equazione che risulta in x, y, esisterà egualmente per questo punto, e sarà perciò l' equazione della curva.

Addizionando le equazioni (1) e (2), e poi sostituendo a $z^2+z'^2$ il suo valore m^2, otteremo

$$y^2+(x+a)^2+y^2+(x-a)^2=m^2, \text{ e riducendo}$$

$$y^2+x^2=\frac{m^2-2a^2}{2} \ldots (4).$$

Questa equazione è evidentemente quella di una circonferenza di cerchio con il centro all'origine O, e con il raggio $r=\sqrt{\left(\frac{m^2-2a^2}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{[2(m^2-2a)]}$

Per costruirla, *descrivasi sopra* OB *il quadrato* OBGH; e sarà $\overline{OG}^2=2a^2$, cioè $OG=a\sqrt{2}$. Dal punto O s' innalzi ON normale ad OG, e dal punto G come centro con il raggio m, descrivasi un' arco di cerchio che tagli ON nel punto F; ultimato il quadrato OFIK, dal triangolo rettangolo OFG avremo

$$\overline{OF}^2=\overline{FG}^2-\overline{OG}^2=m^2-2a^2; \text{ onde } \overline{OI}^2=2\overline{OF}^2$$
$$=2(m^2-2a^2);$$

dunque OL, metà di OI, è il raggio cercato; poichè

$$OL=\frac{1}{2}OI=\frac{1}{2}\sqrt{[2(m^2 I-2a^2)]}.$$

Dunque la circonferenza descritta dal punto O come centro con il raggio OL è il *richiesto luogo geometrico.*

N. B. La linea data m ha evidentemente per *mi-*

nimo $a\sqrt{2}$, ossia, la diagonale OG del quadrato descritto sopra OB; ma non ha *massimo*, perchè può ricevere un valore così grande come si vuole. Perciò, il diametro DD′ che, nella figura attuale, è minore della distanza AB, può essere maggiore in altri casi.

Per sapere in quali circostanze questo diametro è eguale ad AB o $2a$, basta fare

$$\frac{1}{2}\sqrt{[2(m^2-2a^2)]}=a,$$

ciò che ci dà $2(m^2-2a^2)=4a^2$, o $2m^2=8a^2$; dunque

$$m^2=4a^2 \quad \text{ed} \quad m=2a.$$

Sia $m=a\sqrt{2}$; ne risulta $r=0$; e la curva si riduce ad un punto che altro non è che l' origine.

82. *Dati due punti* A, B, *determinare un' altro punto* M *tale che la differenza dei quadrati delle distanze* AM, BM *sia eguale ad un quadrato* m^2.

Con ragionamenti analoghi ai già fatti nel problema precedente si proverebbe che il quesito è *indeterminato*, e che il luogo geometrico è simetricamente situato rapporto alle due rette AB, OC (fig. 60).

Ma questo luogo geometrico dev' essere una linea indefinita, perchè, avendosi l' equazione di condizione

$$\overline{AM}^2-\overline{BM}^2=m^2, \text{ cioè } AM=\sqrt{(m^2+\overline{BM}^2)},$$

può darsi a BM un valore così grande quanto si vuò e sempre ne risulta per AM un valore reale corrispondente.

Ciò posto, prendiamo AB ed OC per sistemi d' assi, e chiamiamo sempre $2a$ la distanza AB, z, z' le distanze AM e BM, x, y le coordinate del punto M riferite a questi assi. Avremo prima, come nel precedente problema, le equazioni

$$y^2+(x+a)^2=z^2 \ldots (1)$$

$$y^2+(x-a)^2=z'^2 \ldots (2),$$

In quanto all' equazione di condizione di sopra, osserviamo che, per tutti i punti, posti a destra di OY, abbiamo AM > BM, cioè $\overline{AM}^2-\overline{BM}^2>o$; ma che per quelli posti a sinistra abbiamo al contrario AM < BM, cioè $\overline{AM}^2-\overline{BM}^2<o$; dunque la differenza dei guadrati, $\overline{AM}^2-\overline{BM}^2$, deve esprimersi con $\pm m^2$, e darci $z^2-z'^2=\pm m^2 \ldots (3)$.

Se, fra queste tre equazioni che hanno luogo per un qualunque punto della linea cercata, si elimini z e z', l'equazione in x, y che si otterrà sarà l'equazione di questo luogo geometrico. Ora, sottraendo la (2) dalla (1) e sostituendo a $z^2-z'^2$ il suo valore $\pm m^2$, si trova $4ax=\pm m^2$; d'onde si deduce

$$x=\frac{\pm m^2}{4a}.$$

Questa equazione, non racchiudendo più la variabile y, rappresenta (§ 46) il sistema di due rette parallele ad OY, e condotte ad eguali distanze dal punto O.

Per costruirle, *prendiamo sopra* OB $=a$, una distanza OF$=\frac{m}{2}$, e sopra la perpendicolare OY' una distanza OH$=\frac{m}{2}$. Condotta la BH, e dal punto F la FG parallella a BH, avremo OG$=\frac{m^2}{4a}$.

Non si tratta ora che di guidare OG da O in I', e poi di condurre per i punti I ed I' le rette IL, I'L' parallele ad OY.

La quantità m può ricevere tutti i valori possibili da o fino all' infinito.

Sia $m=o$, ne risulta $x=o$, e le due rette IL, I'L' si confondono in una sola che è l'asse delle Y.

In fatti da un punto qualunque C di questa retta, risulta

$\overline{AC}^2=BC^2$, onde $\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=m^2=o$.

Sia $m=2a$: si trova $x=\frac{\pm 4a^2}{4a}=\pm a$; e le due rette si confondono con le perpendicolari innalzate dai punti A e B.

Per $m>2a$, queste rette saranno poste a destra e a sinistra sul prolungamento della retta AB.

83. *Problema* 3.° *Dati a due punti* A e B, *trovare un' altro punto* M (fig. 61) *tale che unendolo con i punti* A e B, *l' angolo* AMB, *formato da queste due linee di unione, sia eguale ad un angolo dato* v.

Prendiamo per assi e la retta che congiunge i due punti A e B, e la normale innalzata da O punto medio di AB. E la distanza AB denominiamola $2x'$.

La retta BM, sottoposta a passare per il punto B che ha per coordinate ($y=o$, $x=x'$), ha per equazione $y=a\,(x-x')$ . . . . (1).

Così abbiamo per l' equazione della retta AM

$$y=a'\,(x+x')\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

(attesochè l' ascissa OH è espressa da $-x'$); e siccome vuole il quesito che queste due rette formino l' angolo dato v, perciò le quantità a, a' sono legate fra loro dalla relazione

$$\frac{a-a'}{1+aa'}=\text{tang}\ v\ .\ .\ .\ .\ (3).$$

Dando ad a un valore del tutto arbitrario, ciò che fisserebbe una delle posizioni della retta BM, si dedurrebbe dalla (3) un valore corrispondente per a', ciò che fisserebbe anche una posizione particolare alla retta AM; ed il punto d' intersecazione di queste due rette apparterrebbe al richiesto luogo geometrico; ma se fra le equazioni (1) e (2) e (3) che hanno luogo nel tempo stesso per un qualunque punto M del luogo geometrico, si elimini a ed a', l' equazione risultante in x ed y sarà necessariamente l' equazione di questo luogo geometrico

Ora, per effettuare l' eliminazione, basta di rimpiazzare nella equazione (3) le quantità a ed a' con i valori dedotti dalle equazioni (1) e (2). Con tal sostituzione si ottiene

$$\frac{\frac{y}{x-x'}-\frac{y'}{x+x'}}{1+\frac{y^2}{x^2-x'^2}}=\text{tang } v,$$

onde, togliendo il denominatore e riducendo,

$$x^2+y^2-2\frac{x'}{\text{tang } v}\,y-x'^2=o\ .\ .\ .\ (4),$$

equazione di una circonferenza il di cui centro (§ 47) ha per coordinate, $p=o$, $q=\frac{x'}{\text{tang } v}$, e per raggio

$$r=\sqrt{\left(x'^2+\frac{x'^2}{\text{tang}^2 v}\right)}=\frac{x'}{\text{tang } v}\sqrt{(1+\text{tang}^2 v)}$$

Ma siccome l'ipotesi $y=o$ ci dà $x^2-x'^2=o$, d' onde $x=\pm x'$, ciò che prova che il cerchio passa per i punti A e B, perciò si vede che il cerchio sarà del tutto determinato, quando verrà costruita, so-

pra OY, l' espressione $q = \frac{x'}{\text{tang } v}$, poichè allora il centro avrà una fissata posizione.

Fatto nel punto B *un' angolo* ABL *eguale all' angolo dato ; e poi innalzata da questo punto la* BI *normale a* BL, il punto I d' indeterseccazione con OY sarà il centro del cerchio.

In fatti, il triangolo rettangolo O B I ci da' (trigon. § 26)

$$OI = OB \text{ tang } OBI = OB \cot OBL = \frac{x'}{\text{tang } v}$$

Questa costruzione è evidentemente quella che si trova negli elementi di Geometria t° 2.° § 48.

Discussione. Finchè l'angolo v sarà acuto $\frac{x'}{\text{tang } v}$ sarà positivo ed il centro del cerchio sarà situato sopra la retta AB. Ma se l' angolo v è ottuso, siccome la tang v è allora negativa, tale sarà $\frac{x'}{\text{tang } v}$; ed il centro si trova posto sotto AB.

Sia $v = 100°$, sarà tang $v = \infty$, ed $\frac{x'}{\text{tang } v} = o$; l' equazione (4) si ridurrà ad $x^2 + y^2 = x'^2$, e rappresenterà una circonferenza descritta sopra AB come diametro.

Sia ancora $v = o$, onde tang $v = o$; le espressioni

$$q = \frac{x'}{\text{tang } v} \text{ ed } r = \frac{x'}{\text{tang } v} \sqrt{(1 + \text{tang}^2 v)}$$

divengono *infinite*, ed anche il cerchio è di una grandezza infinita.

Deve ancora osservarsi che tutti i punti della parte superiore AMB della circonferenza data dal-

l' equazione (4) soddisfano alla espressione del quesito; ma che per la parte inferiore AM'B, non è più l' angolo AM'B, ma il suo supplemento AM'H che è eguale all' angolo dato.

Abbiamo infatti per quest' angolo

$$AM'H = M'AB + ABM' \text{ ; onde (t° 3° § 108)}$$

$$\text{tang } AM'H = \frac{\text{tang } M'AB + \text{tang } ABM'}{1 - \text{tang } M'AB . \text{ tang } ABM'}$$

$$\text{ma} \qquad \text{tang } M'AB = - \text{ tang } KAX = -a' \text{ ;}$$

$$\text{tang } ABM' = \text{tang } H' BX = a \text{; dunque}$$

$$\text{tang } AM'H = \frac{-a' + a}{1 + aa'} = \frac{a - a'}{1 + aa'}$$

E così l' equazione (3) resta addempita per quest' angolo.

84. *Conclusione generale* per i problemi indeterminati.

Riflettendo al modo con cui sono stati risoluti i tre precedenti quesiti, si scorge che, per ottenere l' equazione di un luogo geometrico, convien dar principio collo stabilire le equazioni fra le coordinate x ed y di uno qualunque de' suoi punti, e fra le altre quantità che variano con la posizione del punto. Il numero di queste equazioni dev' essere *minore di un' unità* del numero totale delle variabili, compresavi x ed y. Una volta che siano formate queste equazioni si eliminano le variabili, ad eccezione di x ed y, e la risultante equazione è la richiesta, perchè esprime una relazione fra le coordinate di un qualunque punto della curva, e fra le quantità note.

Dobbiamo tuttavia avvertire di scegliere gli assi addattati alla semplificazione dei calcoli, ed alla facile costruzione dei risultati.

Se, per es., nel precedente problema, si prendessero i due assi in una qualunque situazione rapporto ai due punti A e B, le equazioni sarebbero

$$y-y'=a(x-x'),\ y-y''=a'(x-x''),\ \frac{a-a'}{1+aa'}=\tan v$$

ed, eliminando a ed a'

$$\frac{\frac{y-y'}{x-x'}-\frac{y-y''}{x-x''}}{1+\frac{(y-y')(y-y'')}{(x-x')(x-x'')}}=\text{tang } v\,;$$

o, riducendo rapporto ad y ed x,

$$y^2+x^2-\left(y'+y''+\frac{x'+x''}{\text{tang } v}\right)y-\left(x'+x''-\frac{y'-y''}{\text{tang } v}\right)x$$

$$+x'x''+y'y''+\frac{x'y''-y'x''}{\text{tang } v}=o.$$

Benchè si scorga che questa equazione appartiene ad una circonferenza, pure la determinazione del centro e del raggio non è così facile, e non sarebbe piccolo l'imbarazzo se si volesse coi risultati effettuare la costruzione indicata di sopra.

Possiamo affermare pur anche che la difficoltà principale che si presenta nel risolvere i quesiti con i principj della Geometria analitica, consiste nella scelta degli assi.

Bene spesso, le equazioni da stabilirsi si riducono *primieramente* a quelle di due linee rette o di due circonferenze i di cui punti d'intersecazione appartengono al luogo geometrio che si cerca (queste equazioni racchiudendo oltre le coordinate x, y, due altre quantità che variano con la posizione del punto); *secondariamente*, si riducono ad una relazione fra queste due ultime variabili, la quale è presentata immediatamente dalla esposi-

sizione. Ne abbiamo degli esempj nei precedenti problemi.

Nei due primi, la M (fig. 59 e 60) è determinata dalla intersecazione delle due circonferenze aventi i loro centri in A, B, e per raggio z, z'; queste variabili sono poi legate fra loro dalla relazione.

$$z^2+z'^2=m^2 \text{ o } z^2-z'^2=\pm m^2.$$

Nel terzo, il punto M è dato dalla intersecazione di due rette che passano per i punti A, B, e le variabili a, a', che entrano nelle loro equazioni, sono connesse fra loro dalla relazione.

$$\frac{a-a'}{1+aa'}=\text{tang } \nu.$$

Tuttavia può accadere che il numero delle variabili da eliminarsi sia più considerabile, come può vedersi nell'esempio che qui addurremo per ultimo.

85. *Dato un cerchio ed un punto* B (fig. 62) *sopra un piano, se per questo punto si guidi una qualunque retta* KK' *che incontri la circonferenza in due punti* M, M', *e se da questi punti si conduchino le tangenti* MN, M'N, *si richiede il luogo di tutti i punti come* N, *ove queste tangenti s' incontrano.*

Prenderemo per asse delle x la retta OB condotta dal centro al punto dato; e per asse delle y la normale innalzata dal punto O.

Siano x, y le coordinate del punto N, x' ed y' le coordinate del punto M, x'' ed y'' quelle del punto M'; x', y', x'', y'' sono quantità che variano con la posizione della retta KK', e perciò con la posizione del punto N. Sia α la distanza OB, ed r il raggio del cerchio.

Ciò posto, abbiamo (§ 70) per le equazioni delle due tangenti la di cui intersecazione ci dà un punto del luogo geometrico

$$yy'+xx' = r^2 \quad \ldots\ldots (1),$$

$$yy''+xx'' = r^2 \quad \ldots\ldots (2).$$

Siccome queste equazioni racchiudono quattro variabili da eliminarsi, ci si rendono necessarie (§ 84) tre altre equazioni.

.n prima, i punti x', y' ed x'', y'', trovandosi sulla circonferenza, ci danno le relazioni.

$$y'^2+x'^2 = r^2 \quad \ldots\ldots (3)$$

$$y''^2+x''^2 = r^2 \quad \ldots\ldots (4).$$

Di più, dobbiamo esprimere che la retta K K' passa per il punto B. Ora, l'equazione della retta condotta dai due punii x', y', x'', y'', avendo (§ 18) la forma $y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x')$ per esprimere che il punto B trovasi sopra questa retta, convien fare $y=o$ ed $x=\alpha$, onde avere la nuova relazione $-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(\alpha-x')\ldots(5)$.

E queste sono le cinque equazioni fra le quali deve eliminarsi x', y', x'', y''.

Si sottragga la (1) dalla (2), ed avremo

$$y(y'-y'')+x(x'-x'')=o, \text{ cioè } \frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{x}{y}.$$

Per altra parte dalla (5) abbiamo $\frac{y'-y''}{x'-x''}=\frac{-y'}{\alpha-x'}$

Dalla eguaglianza di questi due valori avremo

$$-\frac{x}{y}=\frac{-y'}{\alpha-x'}, \quad \text{o} \quad xx'+yy'-\alpha x=o,$$

ma abbiamo già $xx'+yy'=r^2$,

dunque $r^2 - a x = o$, e perciò $x = \frac{r^2}{a}$.

Questa equazione colla sola x *rappresenta una parallela all'asse delle y condotta da una distanza dal centro, indicata da* $\frac{r^2}{a}$

Finchè il punto B sarà *interiore* al circolo, la quantità $\frac{r^2}{a}$ sarà maggiore di r, ed il luogo geometrico LL' sarà *esteriore* al circolo.

Avrebbe luogo il contrario se il punto B fosse esteriore.

Questa proposizione può riguardarsi come la reciproca di quella dimostrata al § 73.

N. B. Deve osservarsi che, nella eliminazione, non ci siamo prevalsi delle equazioni (3) e (4); attesochè le equazioni (1) e (2) racchiudono implicitamente queste due relazioni (ved. § 67).

CAP. II.

DELLE CURVE DI SECONDO GRADO.

§ I.° *Trasformazione delle coordinate.*

86. *Introduzione.* In questo capitolo e nei due seguenti ci proponiamo di far conoscere la *natura* e le *proprietà* delle curve espresse analiticamente dalle equazioni di secondo grado a due variabili. Ma ci si rende necessario il risolvere avanti un quesito che deve riguardarsi come uno dei più importanti della Geometria analitica: e questo è quello *della trasformazione delle coordinate.*

Riguardando le equazioni della linea retta e del cerchio sotto l' aspetto delle diverse situazioni che

queste linee possono avere rapporto ai due assi, si scorge che una linea medesima può essere rappresentata da una equazione più o meno semplice, secondochè è più o meno semplice la sua posizione riguardo agli assi, e secondo che gli assi stessi sono rettangolari o obliqui.

Così, l'equazione la più generale della retta essendo $y=ax+b$, quella di una retta che passa per l'origine, è $x=ax$, avendo a in ambedue le equazioni un diverso significato, secondochè gli assi sono rettangolari o obbliqui. L'equazione di una parallela ad uno degli assi è $x=a$, o $y=b$.

Così, l'equazione più generale del cerchio è

$$(x-p)^2+(y-q)^2+2(x-p)(y-q)\cos\beta=r^2$$

mentre che quella del cerchio, riferito ai due assi rettangolari condotti dal suo centro, è $x^2+y^2=r^2$.

Si vede dunque che, quando la posizione di una curva sia già fissata sopra un piano per mezzo di una equazione, qualora uno si avveda che questa curva sarebbe in una situazione più semplice rapporto a due nuove rette di quello che lo sia rapporto agli assi primitivi, sarà opportuno, per facilitare la ricerca delle sue proprietà, di procurare di dedurre l'equazione della curva riferita piuttosto ai nuovi assi invece della equazione della stessa curva riferita agli assi primitivi. E questo è l'oggetto che dobbiamo proporci nel problema della trasformazione delle coordinate, problema che può enunciarsi col dire: *Data l'equazione di una curva riferita a due assi qualunque, trovare l'equazione della stessa curva riferita a due nuovi assi.*

87. Siano AX, AY (fig. 63) due rette, rapporto alle quali una curva MM'M''. . . resta fissata di posizione per mezzo dell'equazione $F(x,y)=o$, ed A'X', A'Y' due nuovi assi di una situazione riconosciuta più semplice riguardo alla curva. De-

nominiamo x, y le coordinate AP, PM di un qualunque punto M della curva riferita agli assi primitivi, ed x', y' le nuove coordinate A'P', MP'.

Se si giungerà ad esprimere x, y in funzione di x', y' e delle quantità note, di altro non si tratterà che di sostituire questi valori nella equazione di sopra, ed otterremo l'equazione richiesta.

Per trovare questi valori, si guidino A'X'' e P'H parallele ad AX, poi A'Y'' e P'K parallele ad AY, prolungando A'Y'' fino che incontri AX in B.

Facciamo poi $AB=a$, $A'B=b$, $X'A'X''=\alpha$,

$$Y'A'X''=\alpha' \text{ ed } Y''A'X''=\beta;$$

a, b sono quantità note, poichè non sono che le coodinate della nuova origine, che si suppone data di posizione rapporto agli assi fissati primieramente. Lo stesso deve dirsi degli angoli α, α' che ciascuno dei nuovi assi forma con il primitivo asse delle x, e dell'angolo β che è eguale all'angolo YAX degli assi primitivi.

Ciò posto, la figura ci dà chiaramente

$$AP \text{ o } x= AB+BP=a+A'K+P'H,$$

$$MP \text{ o } y= AB+ML=b+P'K+MH;$$

cosichè, tutto consiste nel determinare

$$A'K, P'K, P'H, \text{ ed } MH.$$

Ora dai triangoli A' P' K, MP'H, per il principio di trigononometria (t° 3° § 129), abbiamo

1.° $A'K : A'P' :: \text{sen } A'P'K : \text{sen } A'KP'$

o, attesochè $A'P'K=P'A'Y''=\beta-\alpha$, ed

$$A'KP'=A'LM=200^\circ-MLX''=200^\circ-\beta,$$

$A'K : x' :: \text{sen}(\beta-\alpha) : \text{sen}\,\beta$, onde $A'K = \frac{x' \,\text{sen}(\beta-\alpha)}{\text{sen}\,\beta}$;

2.° $P'K : A'P' :: \text{sen}\,P'A'K : \text{sen}\,A'KP'$, onde $P'K = \frac{x' \text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta}$

3.° $P'H : MP' :: \text{sen}\,P'MH : \text{sen}\,B'HM$,

o, attesochè $P'MH = Y'A'Y'' = \beta - \alpha'$, e

$$P'HM = A'LM = 200° - \alpha,$$

$P'H : y' :: \text{sen}(\beta-\alpha') : \text{sen}\,\beta$; onde β

$$P'H = \frac{y' \,\text{sen}(\beta-\alpha')}{\text{sen}\,\beta}$$

4.° $MH : MP' :: \text{sen}\,MP'H : \text{sen}\,P'HM$

$$MH = \frac{y' \,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta}$$

Dunque, ponendo questi valori nelle espressioni di x, y, otterremo

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{x' \,\text{sen}(\beta-\alpha) + y' \,\text{sen}(\beta-\alpha')}{\text{sen}\,\beta} + a, \\ y = \dfrac{x' \,\text{sen}\,\alpha + y' \,\text{sen}\,\alpha'}{\text{sen}\,\beta} + b \end{array}\right\} \dots (1).$$

Sono queste le formole più generali della trasformazione delle coordinate, dalle quali è facile il dedurre le formole particolari corrispondenti a tutte le posizioni della nuova origine ed alle diverse direzioni dei nuovi assi rapporto ai primitivi, dando ad a, b valori convenevoli positivi o negativi, ed agli angoli α, α' tutti i valori da 0 fino a 200.°

In quanto all' angolo β, sarà questo sempre dato *a priori*, essendo l' angolo degli assi primitivi.

Ci basterà di indicar quì i casi principali.

88. 1.° *Caso.* Fra tutti è il più semplice quella ove i *due nuovi assi sono paralleli ai primitivi*; cioè conservano gli assi la *direzione medesima*, mentre la sola origine è *differente*.

In questo caso, sarà $\alpha = o$, ed $\alpha' = \beta$, ed avremo

$$\text{sen}(\beta-\alpha) = \text{sen}\,\beta,\ \ \text{sen}\,(\beta-\alpha') = o,\ \ \text{sen}\,\alpha = o,$$

$\text{sen}\,\alpha' = \text{sen}\,\beta$; e perciò, le formole si riducono a

$$\left(\begin{array}{l} x = x' + a \\ y = y' + b \end{array}\right) \ \ldots\ldots\ldots \ (2).$$

Verificandole direttamente con la figura si vede che, (fig. 64), $AP = AB + A'P' = a + x'$,

$$MP = A'B + MP' = a + y'.$$

89. 2.° *Caso.* Si richiede di *passare da un sistema rettangolare ad uno obliquo.*

In questa ipotesi, basta fare (fig 65) $\beta = 100°$, cioè $\text{sen}\,\beta = 1$, $\text{sen}\,(\beta-\alpha) = \cos\alpha$, e

$\text{sen}\,(\beta-\alpha') = \cos\alpha'$, e le formole

divengono $$\left(\begin{array}{l} x = x'\cos\alpha + y'\cos\alpha' + a \\ y = x'\,\text{sen}\,\alpha + y'\,\text{sen}\,\alpha' + b \end{array}\right) \ \ldots \ (3).$$

90. 3.° *Caso*, di maggior uso: *Passare da un sistema rettangolare ad un sistema parimenti rettangolare.*

In queslo caso (fig. 66) è $\beta = 100°$,

α o $Y'A'X'' = Y'A'X' + X'A'X'' = 100° + \alpha$, onde

$$\text{sen}\,\beta = 1,\quad \text{sen}\,(\beta-\alpha) = \cos\alpha,$$

$$\text{sen}\,(\beta-\alpha') = \text{sen}\,(100° - 100° - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha,$$

$$\text{sen}\,\alpha' = \text{sen}\,(100^\circ + \alpha) = \cos\alpha\,;$$

ed abbiamo per formole corrispondenti,

$$\left.\begin{array}{l} x = x'\cos\alpha - y'\,\text{sen}\,\alpha + a \\ y = x'\,\text{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha + b \end{array}\right) \ldots (4).$$

N. B. Quest' ultimo caso può dedursi dal secondo, col farvi soltanto $\alpha = 100^\circ + \alpha$, ottenendosi così $\cos\alpha' = -\text{sen}\,\alpha$; e $\text{sen}\,\alpha' = \cos\alpha$.

91. 4.° *Caso. Da un sistema obliquo passare ad uno rettangolare.*

Basta fare nelle formole generali (fig. 67)

α' o $Y'A'X'' = 100^\circ + \alpha$; onde $\text{sen}\,\alpha' = \cos\alpha$,

$$\text{sen}\,(\beta - \alpha') = \text{sen}\,(\beta - 100^\circ - \alpha)$$

$$= -\text{sen}\,[100^\circ - (\beta - \alpha)] = -\cos(\beta - \alpha)$$

Le formole divengono allora

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{x'\,\text{sen}(\beta - \alpha) - y'\cos(\beta - \alpha)}{\text{sen}\,\beta} + a \\[2ex] y = \dfrac{x'\,\text{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha}{\text{sen}\,\beta} + b \end{array}\right\} \ldots\ldots (5)$$

Benchè ciascuno dei tre ultimi sistemi possa ottenersi direttamente dalla figura, ci basterà di rintracciar quello che corrisponde all'ultimo caso.

Dai punti A' e P' si suppongano sempre condotte le A'X'', P' H parallele ad AX, e poi le A'Y'', P'K parallele ad AY:

Da questa costruzione risulta

$$\text{AP o } x = \text{AB} + \text{A'K} - \text{PH},$$

$$\text{MP o } y = \text{A'B} + \text{P'K} + \text{MH}.$$

Si trova prima, come nel problema generale,

$$A'K = \frac{x' \text{ sen } (\beta - \alpha)}{\text{sen } \beta} \text{ e } P'K = \frac{x' \text{ sen } \alpha}{\text{sen } \beta}.$$

Per altra parte abbiamo dal triangolo MP'H

1.° P'H : MP' : : sen HMP' : sen MHP' ; o, siccome

$HMP' = Y'A'Y'' = Y'A'X' - Y''A'X' = 100° - (\beta - \alpha)$,

$P'H : y' :: \cos(\beta - \alpha) : \text{sen } \beta$; onde $P'H = \frac{y' \cos(\beta - \alpha)}{\text{sen } \beta}$

2.° MH : MP' : : sen MP'H : sen MHP'; ma

$MP'H = MP'A' - HP'A' = 100° - X'A'X'' = 100° - \alpha$;

perciò, $MH : y' :: \cos \alpha : \text{sen } \beta$; onde $MH = \frac{y \cos \alpha}{\text{sen } \beta}$

Dunque finalmente
$$\begin{cases} x = \dfrac{x' \text{ sen}(\beta - \alpha) - y' \cos(\beta - \alpha)}{\text{sen } \beta} + a, \\ y = \dfrac{x' \text{ sen } \alpha + y' \cos \alpha}{\text{sen } \beta} + b. \end{cases}$$

Nel 2.° e 3.° caso, i triangoli A'P'K, MHP' rettangoli rendono più facile la determinazione delle rette A'K, P'K, P'H ed MH.

92. Finalmente se, nelle formole generali, e in quelle che ne sono state dedotte, si supponga $a = o$, e $b = o$, si otterranno nuove formole corrispondenti al caso in cui *può cangiarsi la sola direzione degli assi, senza variare la loro origine.*

Perciò,
$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha' \\ y = x' \text{sen}\alpha + y' \text{sen}\alpha' \end{cases} \text{ ed } \begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \text{sen } \alpha, \\ y = x' \text{sen } \alpha + y' \cos \alpha, \end{cases}$$

sono le formole addattate a farci passare da un sistema rettangolare ad un' altro sistema obliquo o rettangolare colla *medesima origine*:

Generalmente, si distinguono due specie primarie di trasformazioni delle coordinate, *la traslocazione dell' origine*, *ed il cangiamento di direzione degli assi*; quando il quesito esiga questa doppia trasformazione, è spesso opportuno di non effettuarla che successivamente; fra poco ne vedremo degli esempj.

93. Porremo fine a questa teoria generale con l' esame di due casi particolari: 1.° Si richieda di *passare da un sistema obliquo ad uno rettangolare, restando l' origine la stessa, e l' asse delle* x *conservandosi lo stesso* (fig. 68.).

In questo caso sarà $a=o$, $b=o$ $\alpha=o$, $\alpha'=100°$; onde dedurremo $\operatorname{sen}\alpha=o$, $\operatorname{sen}\alpha'=1$, $\operatorname{sen}(\beta-\alpha)=\operatorname{sen}\beta$, $\operatorname{sen}(\beta-\alpha')=-\cos\beta$;

e le formole (1) si riducono a $\left\{\begin{aligned} x &= x'-y'\cot\beta, \\ y &= \frac{y'}{\operatorname{sen}\beta}=y'\operatorname{cosec}\beta. \end{aligned}\right.$

Servono queste per rendere rettangolare un sistema di assi obliqui ai quali vien riferita una curva.

2.° Conservandosi lo stesso sistema d' assi, *si esiga che l' asse delle* y' *si confonda con quello delle* x, *e reciprocamente*.

In questo caso, sarà $\alpha'=o$ ed $\alpha=\beta$ (fig. 69); onde

$$\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\beta,\ \operatorname{sen}\alpha'=o$$

$\operatorname{sen}(\beta-\alpha)=o$, $\operatorname{sen}(\beta-\alpha')=\operatorname{sen}\beta$. Avremo, inoltre, $a=o$, $b=o$; perciò, le formole (1) si riducono ad $x=y'$, ed $y=x'$; ciò che è evidente, non avendo avuto luogo che il cagiamento nella denominazione degli assi.

Dedurremo da ciò, come conseguenza; Che, allorquando le equazioni di due curve sono tali che la seconda di una, si componga con x ed y, come si compone la seconda dell' altra con y ed x, può affermarsi che le due curve sono *identiche*, poichè si passa da un' equazione all' altra, cangiando x in y, e, reciprocamente y in x. In realtà, in questo caso,

non vi è che la posizione della curva, rapporto agli assi, che vien rovesciata.

94. *Prima osservazione*. Benchè, per uno stesso quesito, debbano spesso effettuarsi varie trasformazioni di coordinate pure, per covenzione, sopprimeremo gli apici nei secondi membri delle formole relative a queste diverse trasformazioni, cioè rappresenteremo sempre con x ed y le primitive e le nuove coordinate, benchè i loro valori e le loro posizioni siano diverse; ma l' uso successivo delle formole sarà bastante ad indicare che la curva, riferita già ad un primo sistema, si trova poi riferita ad un secondo, ad un terzo, ... sistema.

Perciò, per passare da un sistema obliquo o rettangolare ad un sistema di coordinate parallele, faremo nella equazione della curva, $x=x+a$, ed $y=y+b$, rappresentando le x ed y del secondo membro le coordinate riferite ai nuovi assi la di cui origine, riferita agli assi primitivi, ha per sue coordinate a e b.

Così, per passare da un sistema rettangolare ad un sistema obliquo con la stessa origine, ci prevarremo delle formole

$$x=x\cos\alpha+y\cos\alpha',\ \text{ed}\ y=x\operatorname{sen}\alpha+y\operatorname{sen}\alpha'.$$

Con tal convenzione, evitandosi la moltiplicità degli apici, vengono a simplificarsi i calcoli.

95. *Seconda osservazione*. Le quantità a, b, α, α' che hanno luogo nelle formole, sono costanti, i di cui valori fissano la posizione della nuova origine, e le direzioni dei nuovi assi rapporto ai primitivi il di cui angolo è espresso da β. Queste quattro quantità devono riguardarsi come note, e date *a priori*, ogni qual volta voglia riferirsi la curva a nuove rette, la di cui posizione siasi riconosciuta più semplice di quella dei primitivi assi rapporto a questa curva.

Accade spesso che una trasformazione di coordina-

te si effettui con la mira d'introdurre un determinato cangiamento nell'equazione della curva; per esempio, per fare scomparire alcuni termini. In tal caso, a, b, α, α' sono *costanti* ma *indeterminate* per un istante, finchè vengono calcolate in guisa che facino risultare le richieste simplificazioni. In quanto all'angolo β, non può disporsene, essendo l'angolo dei due assi primitivi, che è sempre dato *a priori*.

Il numero dei termini, che deve farsi scomparire dall'equazione, indica il numero delle indeterminate da introdussi nel calcolo, e perciò, il sistema delle formole di cui dobbiamo far uso.

Tutto ciò verrà illustrato dalle numerose applicazioni, quando avremo l'apportunità di effettuarle.

§ II. *Nozioni preliminari sulle Curve di secondo grado.*

Per presentare la teoria delle curve di secondo grado in una maniera semplice e totalmente elementare, incominciaremo dal ricercare le equazioni di *tre curve*, a ciascuna delle quali appartenga una proprietà tutta sua particolare. Sarà in seguito che faremo conoscere che queste curve sono *le sole* che possono rappresentare una qualunque equazione di secondo grado a due variabili. Finalmente dimostraremo che queste stesse curve sono quelle che risultano dal tagliare con un piano il cono retto o obliquo, come vien considerato in Geometria; e ciò appunto ha fatto denominarle *sezioni coniche*.

Della Elisse.

96. *Si richiede l'equazione di una curva tale che, dal congiungere ciascuno de' suoi punti* M, (fig. 70) *con due punti fissi* F *ed* F', *risulti la somma delle distanze* FM + F'M *eguale ad una retta data* 2A.

Questa curva è quella che denominasi *una Elisse* I punti F, F' si chiamano *i fochi*, e si dicono *raggi vettori* le distanze FM, F'M. Vedremo in seguito la ragione di queste denominazioni.

Per costruire questa curva colla sua definizione, prendiamo il mezzo O della distanza FF'; e, partendo da questo punto O, *portiamo la metà di* 2A. *da O in B*, *e da O in* A; i punti A e B apparterranno primieramente alla curva. In fatti, risulta da questa costruzione,

$$OB-OF, \text{ o } FB=OA-OF', \text{ o } F'A,$$

$$\text{cioè } FB=F'A; \text{ dunque}$$

$$1.^{\circ}\ FB+F'B=F'A+F'B=2A.$$

$$2.^{\circ}\ F'A+FA=FB+FA=2A.$$

Così, se *dai punti* F, F', *come centri*, *con un raggio eguale ad* A, *si descrivano due circonferenze che si taglino nei punti* C, D, questi punti ancora apparterranno alla curva, avendosi evidentemente

$$FC+F'C=2A, \text{ ed } FD+F'D=2A.$$

Questi due punti si trovano poi sulla perpendicolare ad AB che passa pel punto O.

Per ottenere i punti intermedj, *fisseremo sopra* AB *e fra i punti* F, F', *un qualunque punto* L; *poi*, *dai punti* F' *ed* F *come centri e con i raggi respettivamente eguali ad* AL, LB, *descriveremo due circonferenze che si tagliano in* M, *m*; avremo con ciò due nuovi punti della curva. In fatti, la costruzione ci dà

$$1.^{\circ}\ F'M+FM=AL+LB=2A;\ 2.^{\circ}\ F'm+Fm=2A.$$

Questi punti sono simetricamente situati rapporto ad AB.

Reciprocamente, se dai punti F, F', come centri, e con li stessi raggi AL, LB, descriveremo due circonferenze, otterremo due nuovi punti M', m', che saranno, con i punti M, m, in una posizione simetrica rapporto alla retta CD, FI come è evidente.

Dopo di aver così determinato una serie di punti bastantemente prossimi gli uni agli altri, potremo unirli con una linea continua ACBDA, che sarà la curva richiesta.

N. B. Affinchè l' addotta costruzione possa effettuarsi, basta che la distanza FF' dei centri sia minore della somma dei raggi o 2A, e nel tempo stesso sia maggiore della loro differenza. Ora quest' ultima condizione esige che il punto L sia frà O ed F. Infatti, prendiamo, per esempio, un punto L' situato fra F e B; avremo

$$AL'>AF \text{ ed } L'B<FB \text{ ; onde}$$

$$AL'-L'B>AF-FB, >AF-F'A, \text{ o } FF',$$

dunque la distanza FF' sarebbe minore della differenza dei raggi AL' ed L'B, e le due circonferenze descritte sarebbero interiori l' una all' altra, senza tagliarsi.

97. Può ancora costruirsi l' elisse con un movimento continuo nel modo seguente:

Nei punti F, F' *si fissano tenacemente le estremità di un filo di una lunghezza eguale a* 2A; *questo filo sia tenuto teso da un lapis mobile o altro istrumento che nello scorrere attorno i punti fissi, dopo aver fatte due mezze rivoluzioni, una sopra e l' altra sotto* FF', *avrà delineata la curva.*

Finalmente, se l' elisse dovesse delinearsi sopra il terreno si adoprarebbe un nastro della lunghezza eguale a 2A, e con tre perni, due dei quali fisserebbero in F ed F' le due estremità del nastro, ed il terzo servirebbe col suo movimento a delineare la curva, tenendo il nastro sempre teso.

98. Determinata così la forma e la posizione della Ellisse, rintracciamo la sua equazione, cioè (§ 41) una relazione fra le coordinate di ciascuno de' suoi punti riferiti a due assi fissi.

Siccome, per la precedente costruzione, la curva si compone con punti simetricamente posti rapporto alle rette AB, CD, conviene perciò prendere queste per assi.

Siano $OP=x$, $MP=y$, $FF'=2c$; onde,

$$OF=OF'=c,\ FM=z,\ F'M=z'.$$

Abbiamo primieramente, per le equazioni delle due circonferenze che hanno i loro centri in F, F', e l' incontro delle quali determina il punto M,

$$y^2+(x-c)^2=z^2 \ldots (1)$$

$$y^2+(x+c)^2=z'^2 \ldots (2).$$

In oltre, dalla stessa definizione della curva abbiamo l'equazione di condizione

$$z+z'=2A \ldots (3);$$

e se, fra queste tre equazioni, si elimini z e z', l'equazione risultante in x, y, sarà (§ 84) l'equazione cercata.

Per giungervi facilmente, addizioneremo prima, e poi sottrarremo l' una dall' altra le equazioni (1) e (2), ed avremo

$$2y^2+2x^2+2c^2=z'^2+z^2 \ldots (4)$$

$$4cx=z'^2-z^2 \ldots (5),$$

ma questa si riduce a

$$(z'+z)(z'-z)=4cx, \text{ o } 2A(z'-z)=4cx;$$

d' onde si deduce $$z'-z=\frac{2cx}{A}.$$

Ma abbiamo già $z'+z=2A$;

dunque $z'=A+\frac{cx}{A}$, e $z=A-\frac{cx}{A}$.

Sostituendo questi valori nella (4), si trova

$$y^2+x^2+c^2=A^2+\frac{c^2x^2}{A^2}.$$

o, togliendo il denominatore ed ordinando,

$$A^2y^2+(A^2-c^2)x^2=A^2(A^2-c^2).$$

Da quanto è stato detto, dev' essere FF', o $2c<2A$ dunque A^2-c^2 è essenzialmente positivo, e si fà;

$$A^2-c^2=B^2,$$

l' equazione prende finalmente la forma

$$a^2y^2+B^2x^2=A^2B^2 \; . \; . \; . \; (6).$$

Questa è l' equazione più semplice della elisse.

99. Risolvendola rapporto ad y, e poi rapporto ad x, otterremo

$$y=\pm\frac{B}{A}\sqrt{(A^2-x^2)},\quad x=\pm\frac{A}{B}\sqrt{(B^2-y^2)};$$

Si scorge, *in primo luogo*, che la curva è *simetrica*, rapporto agli assi OX, OY, poichè ciascuno di questi divide in due parti eguali tutte le corde come Mm, MM' condotte parallelamente all' altro.

In secondo luogo, siccome da $y=o$ si ha $x=\pm A$, e da $x=o$ $y=\pm B$, ne siegue che la curva incontri l' asse delle x nei punti A, B, e l' asse delle y nei punti C, D, per i quali si ha OC o OD $=B=\sqrt{(A^2-c^2)}$.

In fatti il triangolo isoscele FCF' ci dà, atteso FC $=$ F'C $=$ A,

$$OC=\sqrt{(\overline{GF}^2-\overline{OF}^2)}=\sqrt{(\overline{CF'}^2-\overline{OF'}^2)}=\sqrt{(CA^2-c^2)}.$$

In terzo luogo, l'ipotesi $x=A$, o $x=-A$, riducendo il doppio valore di y ad un solo, $y=\pm o$, può concludersi (§ 64) che la curva è tangente in A e B alle due rette RS, R'S' condotte parallelamente all' asse delle y.

Così, $y=B$ o $y=-B$, dando $x=\pm o$, la curva è tangente in C e D alle due parallele RR', SS' all'asse delle x.

Si vede poi che, dal supporre $x>A$, o $y>B$, il valore di y, o di x, corrispondente, è imaginario. Dunque la curva è tangente ai quattro lati del rettangolo RSS'R', ed è totalmente compresa in questo rettangolo.

Siaci ancora proposto di valutare la distanza del punto O da un punto qualunque (x, y) della curva.

Abbiamo per espressione di questa distanza

$D=\sqrt{(x^2+y^2)}$; o, ponendo per y^2 il suo

valore $\frac{B^2}{A^2}(A^2-x^2)$,

$$D=\sqrt{\left(B^2+\frac{A^2-B^2}{A^2}x^2\right)}.$$

Facendo $x=o$, si trova subito $D=B$, o OC. A misura che aumenta x, la quantità D aumenta, ed acquista il suo *massimo* quando si dà ad x il maggior valore possibile, che è $x=A$; d'onde deducesi

$$D=\sqrt{\left(B^2+\frac{A^2-B^2}{A^2}.A^2\right)}=A, \text{ o OB}$$

Perciò *la più piccola* distanza del punto O alla curva è OC, e *la più grande* è OB. Ed in altri termini: CD è *la minor corda* che possa condursi per il punto O, ed AB è *la maggiore*.

Bastano queste circostanze diverse per dare ai principianti un' idea molto esatta della forma della elisse.

100. Le due rette 2A, 2B, o AB, CD hanno ricevuto il nome di *assi principali*, e l'equazione (6) vien chiamata l'*equazione della elisse rapporto ai suoi assi.*

Si chiamano ancora *primo* e *secondo* asse, ovvero *asse maggiore*, *asse minore*. La denominazione di asse maggiore proviene probabilmente dall'essere AB la corda maggiore che può condursi nell'interiore della ellisse.

Poichè, sia IK una qualunqu corda, unendo il punto O con i punti I e K, si ottiene il triangolo OIK che ci dà $IK < OI + OK$. Ma si è veduto di sopra che $OK < OB$ ed $OI < OA$; dunque con più ragione sarà $IK < OB + OA$, $< AB$.

I punti A e B si dicono i *vertici* del primo asse, ed i punti C, D *vertici* del secondo asse.

Finalmente il punto O, preso attualmente per origine delle coordinate, è denominato *il centro* della curva, perchè ha la proprietà di *dividere in due parti eguali* tutte le corde, come Mm', che passano per questo punto.

Per darne la dimostrazione, combiniamo l'equazione $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$ con l'altra $y = ax$ che rapresenta una qualunque retta che passa per l'origine.

Sostituendo ad y il suo valore ax nella prima, si trova

$$(A^2a^2 + B^2)\,x^2 = A^2B^2,\ \text{onde}\ x = \frac{\pm AB}{\sqrt{(A^2a^2 + B^2)}}$$

Questi valori di x e di y che esprimono le coordinate M, m' dei punti d'intersecazione della retta con la curva, sono eguali, e segno contrario; dunque le distanze OP, OP' ed MP, m' P' sono eguali, ed i due triangoli OPM, OP'm', essendo eguali, danno $OM = Om'$.

101. Supponiamo che; nel rintracciare un luogo geometrico, siasi ottenuta l'equazione

$$My^2 + Nx^2 = P \ . \ . \ . \ (a)$$

essendo M ; N , P , quantità essenzialmente positive
Facciamo successivamente in questa equazione y o ed $x=o$; ne risulterà per $y=o$, $x=\pm\sqrt{\frac{P}{N}}$;

e per $x=o$, $y=\pm\sqrt{\frac{P}{M}}$

Ciò posto ; $\sqrt{\frac{P}{N}}=A$, $\sqrt{\frac{P}{M}}=B$; onde

$$N=\frac{P}{A^2},\ M=\frac{P}{B^2}.$$

L' equazione (a) diverrà , per la sostituzione ;

$\frac{P}{B^2}y^2+\frac{P}{A^2}x^2=P$, e riducendo ,

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2.$$

Si vede da ciò che l' equazione (a è quella di una ellisse, i di cui assi principali sono $2\sqrt{\frac{P}{N}}$ e $2\sqrt{\frac{P}{M}}$, o , in altri termini , sono i doppio del valore di x corrispondente ad $y=o$; ed il doppio del valore di y corrispondente ad $x=o$.

Conoscendo i due assi $2A$, $2B$, o $2\sqrt{\frac{P}{N}}$, $2\sqrt{\frac{P}{M}}$ per ottenere i fochi , prevalendoci della relazione $B^2=A^2-c^2$ avremo

$$c=\pm\sqrt{(A^2-B^2)}.$$

Sopra due rette indefinite rettangolari (fig. 71) preso $OB=OA=A$, ed $OC=OD=B$; e poi

dal punto C come centro con un raggio eguale ad A, si descriva un'arco di cerchio che tagli AB in due punti F, F'; saranno questi i due fochi poichè

$$OF = \sqrt{(\overline{CF}^2 - \overline{OC}^2)} = \sqrt{A^2 - B^2}).$$

Siccome dalla equazione (a) abbiamo

$$A^2 = \frac{P}{N},\ e\ B^2 = \frac{P}{M},\quad \text{e siegue che}$$

$$c = \sqrt{\left(\frac{P}{N} - \frac{P}{M}\right)} = \sqrt{\left[\frac{P(M-N)}{MN}\right]}.$$

102'. Poichè abbiamo da qualunque ellisse $2A > 2B$,

converrà supporre $\frac{P}{N} > \frac{P}{M}$, cioè $M > N$.

Se aecadesse altrimenti, cioè se si avesse nella (a $M>N$, si cangerebbe (§ 93) y in x ed x in y. Con ciò, l'equazione diverebbe $Ny^2+Mx^2=P$, e rappresenterebbe ancora una ellisse avente per primo

asse $2\sqrt{\frac{P}{M}}$, e per secondo $2\sqrt{\frac{P}{N}}$.

N. B. Prima della trasformazione delle coordinate, la curva ha la posizione indicata dalla *figura* 72; ma dopo, prende la posizione solita a supporsi della (fig. 70).

102'. Se, per un caso particolare, supporremo $N=M$,

l'equazione si riduce allora a $y^2+x^2=\frac{P}{M}$.

cioè all'equazione di un cerchio che ha $\sqrt{\frac{P}{M}}$

per raggio; la quantità c, o $\sqrt{\left[\frac{P(M-N)}{MN}\right]}$,

si *annulla*, e perciò i due fochi si riuniscono nel centro.

Puo dunque riguardarsi il cerchio come una ellisse, che ha i *due assi* 2 A, 2 B *eguali*, oppure, nella quale i due fochi vanno a confondersi.

103. Ci occorrerà spesse volte di ridurre un' equazione, come $My^2+Nx^2=P$, alla forma

$$A^2y^2+B^2=x^2B^2,$$

ed è perciò che qui indicheremo il metodo semplice, e facile per ridurvela.

Moltiplicando i due membri della prima equazione per un fattore indeterminato l, avremo

$$Mly^2+Nlx^2=Pl.$$

Ma, per ipotesi, vuò ottenersi

$$Pl=Ml\times Nl=MN.l^2, \text{ che ci dà}$$

$l=\frac{P}{MN}$. Basta dunque *moltiplicare i due membri della proposta per il quoto del secondo membro diviso per il prodotto dei coefficienti di* y^2 *e di* x^2.

Risulta, in fatti, da tal moltiplicazione,

$$\frac{P}{N}y^2+\frac{P}{M}x^2=\frac{P^2}{MN}\text{; ciò che ci dà}$$

$$A^2=\frac{P}{N},\ B^2=\frac{P}{M},\ c^2=A^2-B^2=\frac{P(M-N)}{MN}$$

Serva per esempio l' equazione $5y^2+3x^2=6$.

Moltiplicandola per $\frac{6}{5\times3}$ o $\frac{2}{5}$, si trova

$$2y^2+\frac{6}{5}x^2=\frac{12}{5}\text{; dunque}$$

$$A^2 = 2 ,\ B^2 = \frac{6}{5},\ c^2 = \frac{4}{5};\ \text{ovvero}$$

$$A = \sqrt{2} ,\ B = \frac{1}{5}\sqrt{30} ,\ c = \frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

Abbiasi ancora l' equazione $3y^2 + 4x^2 = 5$.

Moltiplicando per $\frac{5}{3\times4}$ o $\frac{5}{12}$, si ottiene

$$\frac{5}{4}y^2 + \frac{5}{3}x^2 = \frac{25}{12};$$

o, cangiando y in x, e reciprocamente,

$$\frac{5}{3}y^2 + \frac{5}{4}x^2 = \frac{25}{12}.\ \text{Dunque}$$

$$A = \frac{1}{3}\sqrt{15} ,\ B = \frac{1}{2}\sqrt{5} ,\ e = \frac{1}{6}\sqrt{15}.$$

Dell' Iperbole.

104. *Si richiede l' equazione di una tal curva, che dal congiungere qualunque suo punto* M (fig. 75) *con due punti fissi* F, F', *la differenza delle distanze*, F'M—FM, *sia uguale ad una linea data* 2A.

Questa curva è quella che si chiama *una iperbole*; i punti F, F' ne sono *i fochi*, e diconsi *raggi vettori* le FM, F'M.

Incominciamo coll' indicare un mezzo per costruire questa curva.

Partendo dal punto O, *medio di* FF', *prenderemo due distanze* OA, OB, *eguali ad* A; i due punti A e B appartengono alla curva. Infatti, risulta dalla nostra costruzione

$BF = AF'$, onde $AF - AF' = AF - BF = 2A$,

e $$BF' - BF = BF' - AF' = 2A$$

N. B. I punti A, B, sono necessariamente situati fra F ed F', perchè altrimenti, la somma delle distanze di ciascuno di questi punti dai punti F ed F', e non già la loro differenza, sarebbe eguale a 2 A. Ciò che prova dover' essere 2 A *minore di* FF'.

Per ottenere altri punti della curva, segneremo sulla retta OF, a destra del punto F, un qualunque punto L; e poi, dai punti F', F, come centri, con i raggi AL, BL, *descriveremo successivamente due circonferenze che si taglino in* M, *m*; otterremo così due punti della curva; poichè dall' unire il punto M, per esempio, con i punti F', F, avremo

$$F'M - MF = AL - BL = 2A.$$

Reciprocamente, *dai punti* F, F', *come centri, e con i raggi medesimi, desciveremo due circonferenze;* ed avremo due nuovi punti M' *m'*, che saranno, posti simetricamente coi punti M, *m*, rapporto alla normale OC.

Si esige da tal costruzione che il punto L sia situato a destra del punto F, perchè se fosse in L', avendosi $BL' < BF$, ne seguirebbe $AL' + BL'$, o

$$AB + 2BL' < AB + 2BF,$$

o $< FF'$. Cosichè, le due circonferenze sarebbero tali, che la distanza FF' dei centri sarebbe maggiore della somma dei raggi; dunque sarebbero esse esteriori del tutto l'una all'altra, nè potrebbero mai tagliarsi.

Ma il punto L può prendersi a destra del punto F in una distanza così grande quanto si vuole. Si scorge da ciò che la curva è composta di *due*

rami eguali ed opposti m B M, m' A M', *che si estendono indefinitamente a destra del punto* B, *ed a sinistra del punto* A, *tanto sopra che sotto la retta* AB.

Non faremo parola del processo che potrebbe adoprarsi per delineare l'iperbole, con un moto continuo perchè, oltre esser poco comodo per la prattica, non serve che a delineare la curva in parti.

Ci occuperemo piuttosto a ricercarne la sua equazione.

105. Essendo l'iperbole, come l'ellisse, simetrica rapporto ad AB ed OC, prenderemo queste due rette per assi delle coordinate.

Siano dunque

$$OP=x,\ MP=y,\ OF=OF'=c,\ FM=z,\ F'M=z'.$$

Avremo primieramente, come per l'ellisse, le due equazioni

$$y^2+(x-c)^2=z^2 \ldots\ldots (1)$$

$$y^2+(x+c)^2=z'^2 \ldots\ldots (2)$$

alle quali deve associarsi l'equazione di condizione che ci vien data dalla enunciazione, cioè

$$z'-z=2A \ldots\ldots (2)$$

Per eliminare z e z', addizioneremo e sottrarremo le (1) e (2), ed avremo

$$2y^2+2x^2+2c^2=z'^2+z^2 \ldots\ldots (4)$$

$$4cx=z'^2-z^2 \ldots\ldots (5).$$

Ma questa ci dà

$$(z'-z)(z'+z),\ \text{o}\ \ 2A(z'+z)=4cx,$$

d'onde si deduce $z'+z=\dfrac{2cx}{A}$;

ma, abbiamo già $z'-z=2A$;

dunque $z'=\frac{cx}{A}+A$, e $z=\frac{cx}{A}-A$.

Questi valori, portati nella (4), ci fanno ottenere

$$y^2+x^2+c^2=\frac{c^2x^2}{A^2}+A^2,$$

o togliendo il denominatore e trasportando

$$A^2y^2+(A^2-c^2)x^2=A^2(A^2-c^2).$$

Ma, siccome si è veduto che la distanza FF', o $2c$, dev' esser sempre maggiore di $2A$, ne siegue che A^2-c^2 è essenzialmente *negativo*. Dunque, ponendo $c^2-A^2=B^2$,
si trova in fine, per l' equazione dell' iperbole

$$A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2 \quad . \; . \; . \; . \; (6).$$

Questa equazione non diversifica da quella della ellisse che per la sostituzione di $-B^2$ in luogo di B^2. Perciò le due curve, benchè diversissime nella forma, essendo l' una limitata per ogni verso mentre l' altra è affatto illimitata, pure sono fornite di analoghe proprietà.

Se nella equazione faremo $y=o$, otterremo $x=\pm A$; ciò che prova che la curva passa per i punti A e B, circostanza già da noi avvertita.

Sia ancora $x=o$, avremo $y^2=-B^2$, onde

$$y=\pm B\sqrt{-1},$$

e conosceremo che la curva non incontra l' asse delle y.

Potremo tuttavia, sopra quest' asse, indicare, per convenzione, due punti C e D, la di cui distanza dal punto O venga espressa da B, o

$$\sqrt{(c^2-A^2)}.$$

Per fissare la posizione di questi punti, basta

descrivere dal punto B come centro con un raggio eguale a c o OF, un' arco di cerchio che tagli OY nei due punti richiesti, poichè avremo

$$OC = \sqrt{(\overline{OF}^2 - \overline{OB}^2)} = \sqrt{(c^2 - A^2)}.$$

E, facendo $x = +A$, o $x = -A$, nell' equazione risoluta rapporto ad $y = \pm \frac{B}{A} \sqrt{(x^2 - A^2)}$, siccome si trova $y = \pm o$, e dando ad x valori positivi, o negativi, *aritmeticamente* minori di A, si ottengono valori *imaginarj* per y, possiamo concludere:

1.° Che la curva è tangente in A e B alle due parallele R'S', RS all' asse delle y:

2.° Che la curva si estende indefinitamente a sinistra del punto A, ed a destra del punto B.

Si vede finalmente che la curva è composta di due rami eguali ed opposti, ciascuno dei quali vien diviso in due parti eguali dalla retta AB; di modo che, piegando la figura tanto a seconda della retta CD, come della retta AB, le quattro parti della curva si vedrebbero coincidere perfettamente due a due.

106. Le quantità 2A, 2B sono, come nell' ellisse chiamate *gli assi principali* dell' iperbole, o l' uno *primo asse*, e l' altro *secondo asse*. E siccome può aversi una qualunque relazione fra le due grandezze A, B, perciò sarebbero inproprie le denomizioni di *asse maggiore* e di *asse minore*.

Al primo asse si dà anche il nome di *asse trasverso*, ed al secondo di *asse non trasverso*, perchè uno incontra la curva, e l' altro non la incontra.

Potrebbe essere A = B, nel qual caso l'equazione si ridurrebbe ad $y^2 - x^2 = -A^2$.

È per questo che l' iperbole si denomina *equilatera*, perchè avente eguali i suoi due assi. *L' iperbole equilatera* è in confronto di qualunque iperbole ciò che il cerchio è alla ellisse.

Finalmente, i punti A e B si chiamano i *due vertici* della curva.

107. Dimostriamo, come nella ellisse, che il punto O è il *centro* della curva, cioè, che *tutte le rette che, passando per il punto O, vanno a terminare nella curva, sono divise in due parti eguali da questo punto.*

Sia m' M una qualunque retta condotta per il punto O. Combinando fra loro le due equazioni

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2,\ y = ax,$$

si trova, col sostituire nella prima ax ad y,

$$(A^2a^2 - B^2)\,x^2 = -A^2B^2;\ \text{onde}\ x = \frac{\pm AB}{\sqrt{(B^2 - A^2a^2)}}$$

e perciò, attesochè $y = ax$, $y = \dfrac{\pm AB\,a}{\sqrt{(B^2 - A^2a^2)}}$

Risulta da ciò, $OP = OP'$, ed $MP = m'P'$; onde, essendo eguali i due triangoli OPM, $OP'm'$, avremo $OM = Om'$.

Esaminando i valori di x ed y, si vede che non sono reali, cioè che i diametri non incontrano la curva, se non se fino che sia

$$B^2 - A^2a^2 > o,\quad o\quad a^2 < \frac{B^2}{A^2}$$

Supponendo $B^2 - A^2a^2 = o$, cioè $a = \pm \dfrac{B}{A}$,

i valori di x e di y divengono *infiniti*; ciò che prova che le due rette corrispondenti, che sono situate l'una sopra l'altra sotto l'asse delle x, non incontrano l'iperbole che ad *una distanza infinita*

108. Si costruiscano queste due rette $y = \pm \dfrac{B}{A}x$,

$y = -\frac{B}{A}x$, perchè meritano particolare attenzione.

Per tale oggetto, sopra le due rette $AB = 2A$, $CD = 2B$ venga compito il rettangolo R'RSS'; avremo evidentemente $BR = BS = B$; onde

$$\text{tang BOR} = \frac{BR}{BO} = \frac{B}{A};\ \text{tang BOS} = -\frac{B}{A}.$$

Dunque le rette OR, OS condotte per il punto O e per i punti R, S, sono le due rette richieste.

Risolviamo l' equazione dell' iperbole rapporto ad y, e troveremo $y = \pm\frac{B}{A}\sqrt{(x^2 - A^2)}$, ovvero

$$y = \pm\frac{Bx}{A}\sqrt{\left(1 - \frac{A^2}{x^2}\right)}.$$

Sotto quest' ultima forma è evidente, che più aumenta x, e più $\frac{A^2}{x^2}$ diminuisce, e perciò il valore di y si approssima sempre più a divenire eguale a

$$\pm\frac{B}{A}x.$$

Se si attribuisca ad x un valore *più grande di qualunque quantità data*, o $x = \infty$, il termine $\frac{A^2}{x^2}$ si *annulla*, ed il valore di y si riduce ad

$y = \pm\frac{B}{A}x$, cioè, all' ordinata del sistema delle due rette S' R ed SR'.

Queste rette, denominate *assintoti*, sono dunque tali, che *la curva si approssima continuamente*

sempre più ad esse, e quanto si vuò, senza poterle però mai raggiungere in altra parte che all' infinito.

Nel quesito attuale, gli assintoti S'R, SR', possono riguardarsi come *due rette che separano i diametri che incontrano la curva da quelli che non la incontrano.*

In fatti, sia un diametro m' M, per il quale abbiamo ang. MOX< ang. ROX, onde $a < \frac{B}{A}$; i valori ottenuti precedentemente per x e per y sono *reali*; ma per un diametro come K'K, siccome l'ang. KOX > ang. ROX, ne risulta $a > \frac{B}{A}$, ed i valori di x, y sono *imaginarj*

Quando si suppone l' iperbole *equilatera* (§106), cioè $B = A$, $\pm \frac{B}{A}$ diviene eguale a ± 1, dunque ciascuno degli angoli ROX, SOX è di 50°, ed i due assintoti sono *normali fra loro.*

Riassumeremo in seguito queste rette, che si riproducono sovente nella teoria dell' iperbole.

109. Sopponiamo adesso che, per equazione di un luogo geometrico, siasi ottenuto

$$My^2 - Nx^2 = -P;$$

dal moltiplicare (§ 103) i due membri di questa equazione per $\frac{P}{MN}$, si ottiene

$$\frac{P}{N}y^2 - \frac{P}{M}x^2 = -\frac{P^2}{MN}.$$

Questa nuova equazione paragonata con quella dell' iperbole, $A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2$, ci dà

$$A^2=\frac{P}{N},\ B^2=\frac{P}{M};\ \text{onde}\ A=\pm\sqrt{\frac{P}{N}},\ B=\pm\sqrt{\frac{P}{M}}$$

dunque la proposta rappresenta un' iperbole che ha per *primo asse* $2\sqrt{\frac{P}{N}}$, e per *secondo* $2\sqrt{\frac{P}{M}}$.

La relazione $B^2=c^2-A^2$, ci dà

$$c=\pm\sqrt{(A^2+B^2)};$$

onde, ponendo in luogo di A e B i loro valori,

$$c=\pm\sqrt{\left[\frac{P(M+N)}{MN}\right]}.$$

Per fissare la posizione dei fochi, conoscendo gli assi, basta *prendere*, *sopra due rette rettangolari*,

$$OB=OA=A=\sqrt{\frac{P}{N}};$$

$OC=OD'=B=\sqrt{\frac{P}{M}}$ (fig. 74); e poi *innalzare dal punto* B *una normale* BD=B, *e condurre* OD. La circonferenza descritta dal punto O come centro, con il raggio OD, taglierà AB in due punti F, F', che saranno i punti richiesti, poichè abbiamo

$$OF=OF'=\sqrt{(\overline{OB}^2+\overline{BD}^2)}=\sqrt{(A^2+B^2)}.$$

Osserveremo che questa costruzione ci dà nel tempo stesso la direzione OD di uno degli assintoti; per ottenere l' altra, basta prolungare DB di una lunghezza BD' = BD, e poi condurre la OD'.

110. Se l' equazione avesse la forma

$$My^2-Nx^2=P,$$

converrebbe cangiare y in x ed x in y; ciò che ci darebbe $Ny^2-Mx^2=-P$, e l' equazione si conserverebbe quella di un' iperbole, che avrebbe per pri-

mo asse, $2\sqrt{\frac{P}{M}}$, e per secondo asse, $2\sqrt{\frac{P}{N}}$.

Prima della trasformazione, la curva ha la posizione indicata dalla *figura* 75, ma, dopo, riprende la posizione della *figura* 73.

Moltiplichiamo i due membri della proposta equazione per $\frac{P}{MN}$, ed avremo

$$\frac{P}{N}y^2 - \frac{P}{M}x^2 = \frac{P^2}{MN}, \text{ o}$$

$$B^2y^2 - A^2x^2 = A^2\,B^2, \text{ facendo } \frac{P}{N} = B^2, \ \frac{P}{M} = A^2.$$

E tale è la forma dell' equazione dell' iperbole *riferita al suo secondo asse*, *o al suo asse non trasverso*, come asse delle x.

Da questa si deduce

$$y = \pm \frac{A}{B}\sqrt{(x^2+B^2)};$$

ciò che prova che è sempre reale tal quantità, qualunque sia il valore di x ed y.

Da $x=o$, abbiamo $y=\pm A$, e questo è il valor *minimo* fra tutti quelli che può ricevere y.

Della Parabola.

111. *Trovare l' equazione di una curva tale, che la distanza di ciascuno de' suoi punti* M (fig. 76) *da un punto fisso* F (chiamato *foco*), *sia eguale alla distanza dello stesso punto* M *da una retta fissa* LL', denominata *direttrice*.

Presentiamo primieramente la maniera di costruire con punti questa curva, cognita col nome di *parabola*.

Dopo di aver condotta dal punto una perpendicolare sopra LL', preso il punto medio A della distanza FG, questo punto A apparterrà alla curva, dandoci AG = AF.

Questo punto si chiama *il vertice* della parabola.

Per ottenere altri punti, *s'innalzi da un qualunque punto* P *della retta* GFX *posto a destra di* A *una normale a* GF ; *e poi dal punto* F *come centro, con il raggio* GP, *si descriva un' arco di cerchio che tagli la normale in due punti* M, *m* ; avremo così *due* punti della curva ; poichè risulta da tal costruzione,

$$FM \text{ o } Fm = GP = MQ.$$

Di quì è che la parabola vien composta di due parti AM'M, A*m* *m'*, simetriche rapporto a GF.

Può anche descriversi con un movimento continuo nel modo seguente.

Un lato QR (fig. 77) *dell' angolo retto di una squadra scorra lungo* LL', e *sempre coincidente con* LL'. *Nel punto* F, *del piano, e nel punto* V *della squadra si fissino le due estremità di un filo che eguagli in lunghezza l'altro cateto* QV *della squadra, al quale deve appoggiarsi costantemente un lapis che tenga sempre teso il filo mentre scorre la squadra lungo* LL'. La traccia segnata da questo lapis sarà necessariamente una parabola.

In fatti, da qualunque posizione QRV della squara, abbiamo FM+MV=MQ+MV; onde MF=MQ.

Allorchè è la squadra in una posizione Q'R'V' cosichè Q'V' passi per il punto F, il filo si ripiega sopra se stesso da F in A, ed il punto A è il vertice della curva; poichè abbiamo

$$FA+AV' = AQ'+AV' \text{ ; onde } FA = AQ'.$$

Per delineare la parte inferiore della curva, basta invertere la posizione della squadra.

N. B. Da questo metodo non otteniamo che una porzione della curva, tanto più grande quanto è più lungo il lato QV della squadra; cosichè la curva và a terminare nel punto V'', per il quale abbiamo FV'' = V''Q'' = VQ.

Da questa maniera di descrivere la curva ha probabilmente ricevuto la LL' il nome di *direttrice*.

112. Facciamoci ora a rintracciare l'equazione della parabola. Prenderemo per asse delle x la retta GF (fig. 76), perchè divide la curva in due parti eguali, e per origine il punto A che appartiene alla curva.

Siano x, y, le coordinate AP, PM del punto M, z la distanza FM, e p la distanza FG;

onde $\quad AF = AG = \frac{p}{2}$, e $\quad GP = \frac{p}{2} + x.$

La circonferenza, descritta dal punto F come centro, con il raggio FM, ha per equazione

$$y^2 + (x - \frac{p}{2})^2 = z \quad , \ . \ . \ . \ (1);$$

ma dall' equazione di condizione abbiamo

$$FM = PG, \text{ o } \quad z = x + \frac{p}{2} \ . \ . \ . \ (2).$$

Eliminando z fra queste due equazioni, troveremo per l'equazione della curva,

$$y^2 + (x - \frac{p}{2})^2 = (x + \frac{p}{2})^2,$$

o, riducendo, $\quad y^2 = 2px \ . \ . \ . \ (3).$

E questa è l'equazione della parabola *riferita ai suoi assi principali*. AX vien detto il *primo* asse principale, ed AY il *secondo*.

Si deduce da questa equazione, $y = \pm \sqrt{2px}$: e siccome, per $x = o$, abbiamo $y = \pm o$, ne siegue:

1.° Che la curva è tangente in A all' asse delle y:

2.° Che si estende indefinitamente a destra dell' asse delle y tanto sopra, che sotto l' asse delle x.

113. Il coefficiente $2p$ della x, cioè *il doppio della distanza del foco dalla direttrice*, si chiama *parametro*.

Il parametro eguaglia ancora *il doppio dell' ordinata che passa per il foco*; poichè, attesa la definizione della curva, la perpendicolare FN dev' essere eguale ad NH o FG.

Altronde poi se, nell' equazione $y^2 = 2px$ si fa $x = \frac{p}{2} = AF$, si trova $y^2 = p$, onde $y = \pm p$.

114. Quantunque la definizione della parabola non offra alcun'analogia con quelle della ellisse e dell' iperbole tuttavia possiamo ravvicinar queste curve con una trasformazione di coordinate eseguita rapporto alla ellisse ed all' iperbole.

Ripresa l' equazione

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2 \quad . \ . \ (1)$$

proponiamoci di riferire la ellisse al vertice A (fig. 70) come origine, conservando gli assi la medesima direzione. Per tale oggetto, dovremo prevalerci (§ 88) delle formole $x = x + a$, $y = y + b$; siccome le a, b, che rappresentano qui le coordinate del punto A, ci danno

$$b = o, \quad a = -A,$$

ne siegue che le formole si riducono ad

$$x = x - A, \quad y = y,$$

e che perciò basta sostituire, nell' addotta equazione, $x - A$ ad x, lasciando y nel suo stato primitivo.

Da tal sostituzione risulta

$$A^2y^2 + B^2x^2 - 2\,AB^2x = o$$

d' onde si deduce $y^2 = \frac{B^2}{A^2}(2Ax - x^2) \ldots (2)$,

E questa è l' equazione della ellisse *riferita al suo vertice sinistro*, *preso per origine*.

Ciò posto, potrà darsi a quest'equazione la forma

$$y^2 = 2\frac{B^2}{A}x - \frac{B^2}{A^2}x^2\text{, ovvero, } y^2 = 2px - \frac{P}{A}x^2 \ldots (3)$$

$$\left(\text{facendo } \frac{B^2}{A} = p\right).$$

Supponiamo che le due quantità A e B crescano indefinitamente, in guisa però che p o $\frac{B^2}{A}$ resti costante (e ciò e permesso attesochè l' equazione $\frac{B^2}{A} = p$, nella quale, dopo aver preso per p un valore fisso e determinato, possono darsi ad A valori differenti, e poi calcolare un valore corrispondente per B); nella fatta ipotesi, si vede, che, più cresce A, e più diminuisce il termine $\frac{p}{A}$; cosicchè, dal supporre $A = \infty$, ne risulta $\frac{p}{A} = 0$. Dunque l'equazione (3) si riduce ad $y^2 = 2px$, che altro non è che l' equazione di una parabola.

Possiamo da ciò concludere che la parabola è una ellisse che *ha il maggior' asse infinito*, ossia che ha il centro situato in una distanza infinita.

115. Può effettuarsi un consimile ravvicinamento fra la parabola e l' iperbole; ma conviene allora riferire quest' ultima curva al suo vertice B (fig. 73); il che si riduce a dover sostituire, nell' equazio-

ne $A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2$, in luogo di x, $x+A$. Diverrà essa $A^2y^2-B^2x^2-2AB^2x=0$; onde

$$y^2=\frac{B^2}{A^2}(2Ax+x^2), \quad o \quad y^2=2px+\frac{p}{A}x^2 \ldots (4)$$

(facendo, come per l'ellisse, $\frac{B^2}{A}=p$).

Facendo adesso crescere A e B in modo che resti costante p, avremo, per $A=\infty$, $\frac{p}{A}=0$; e l'equazione (4) si ridurrà ad $y^2=2px$.

In questo caso, il secondo ramo, il centro, gli assintoti (§ 108) spariscono, o sono situati all' infinito.

116. Dopo ciò è facile il rilevare, che le tre curve possono, in generale, essere rappresentate dall' equazione $y^2=2px+qx^2$.

Quando la curva è una parabola, sarà $q=0$ e l' equazione si ridurrà ad $y^2=2px$.

Se sarà una ellisse, avremo $2p=\frac{2B^2}{A}$, $q=-\frac{B^2}{A^2}$

Finalmente, nel caso dell' iperbole, avremo

$$2p=\frac{2B^2}{A}, \quad q=+\frac{B^2}{A^2}.$$

Per l'analogia con la parabola, si chiama *parametro* della ellisse o dell' iperbole la quantità $2p$, o $\frac{2B^2}{A}$, che forma il coefficiente di x nell' equazione della curva riferita ad uno de' suoi vertici.

Questa quantità, capace della forma $\frac{4B^2}{2A}$, o $\frac{2B+2B}{2A}$, altro non è che *una terza proporzionale al primo ed al secondo asse.*

Il medesimo risultato si ottiene dalla ellisso, come dalla parabola, *il doppio dell' ordinata che passa per il foco* F o F'; poichè supposto, per esempio $x = \pm c = \pm \sqrt{(A^2 - B^2)}$, nella equazione $A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2$, troveremo

$$A^2 y + A^2 B^2 - B^4 = A^2 B^2; \text{ onde } y = \pm \frac{B^2}{A}.$$

Lo stesso risultato si otterrebbe per l'iperbole,

Quest' ultimo carattere del foco, delle tre curve, serve bene spesso per fissare la posizione di questo punto, e per farci riconoscere l'esistenza in tal luogo o in tal altro del piano della curva.

117. Potrebbe ancora farsi risultare la connessione che esiste fra queste curve dal seguente quesito, del quale è un caso particolare quello che ha servito per definir la parabola.

Si domanda l' equazione di una tal curva, che la distanza di ciascun suo punto M (fig. 78) *da un punto fisso* F, *stia alla distanza dello stesso punto* M *da una retta* LL' *di posizione fissata nel rapporto dato* $m : 1$; in maniera che sia

$$MF : MQ :: m : 1.$$

Dal punto F condotta la FG normale ad LL', dividiamo questa distanza FG nel rapporto $m : 1$; il punto A è uno dei punti della curva.

Per costruire altri punti, segniamo un qualunque punto P sopra GF, ed innalziamo una perpendicolare da questo punto; poi dal punto F come centro con un raggio eguale alla *quarta proporzionale* $1 : m :: GP : x$, descriviamo un' arco di cerchio che tagli la perpendicolare nei punti M ed M'; questi punti apparterranno alla curva; poichè avremo, da questa costruzione,

$$FM \text{ o } x : GP \text{ o } MQ :: m : 1;$$

e così in seguito,

Per determinare l' equazione del luogo geometrico, prenderemo per asse delle x la retta GF, rapporto alla quale la curva è simetrica; per asse delle y la normale innalzata dal punto A che appartiene alla curva, e che può riguardarsi come il suo vertice.

Siano dunque

$$AP = x, \ MP = y, \ FM = z, \ AF = \alpha, \text{ onde}$$

$$AG = \frac{\alpha}{m} \text{ (poichè abbiamo FA : AG :: } m : 1\text{).}$$

L' equazione della circonferenza che ha il centro in F e per raggio FM, è

$$y^2 + (x - \alpha)^2 = z^2 \quad . \ . \quad (1)$$

Di più, deve aversi FM : GP :: m : 1,

$$\text{cioè } z : x + \frac{\alpha}{m} :: m : 1, \text{ ovvero, } z = mx + \alpha \ \ldots (2).$$

Perciò, eliminando z fra queste equazioni, si otterrà (§ 84) l' equazione richiesta; che sarà, a riduzioni effettuate,

$$y^2 + (1 - m^2)x^2 - 2\alpha(1 + m)x = 0 \quad . \ . \ . \quad (3).$$

Questa equazione rimane del termine indipendente da x e da y, come dev' essere, poichè, passando la curva per l' origine, deve restar addempita la sua equazione col farvi $y = 0$, ed $x = 0$. Esaminiamo successivamente le circostanze che corrispondono alle tre ipotesi di

$$m < 1, \quad m = 1, \quad m > 1.$$

Sia *primieramente*, come caso più semplice,

$$m = 1.$$

L' equazione (3) si riduce ad $y^2 = 4\alpha x$, ed è im-

mediatamente paragonabile con l' altra $y^2 = 2px$, ponendo $4a = 2p$, onde $p = 2a$.

Perciò la curva è una *parabola* che ha il foco in F, e che ha per direttrice LL'. Il punto A è poi il mezzo della distanza FG, avendosi

$$FG : AG :: 1 : 1.$$

Sia in secondo luogo $m < 1$, nel qual caso il coefficiente di x^2 è *essenzialmente positivo*.

L' equazione può avere la forma

$$y^2 = (1-m^2)\left(\frac{2a}{1-m} \cdot x - x^2\right);$$

e, paragonandola con quest' altra $y^2 = \frac{B^2}{A^2}(2Ax - x^2)$,

se ne deduce $A = \frac{a}{1-m}$, $\frac{B^2}{A^2} = 1 - m^2$; onde

$$\frac{B^2}{A} = \frac{a(1-m^2)}{1-m} = a(1+m), \text{ e}$$

$$B^2 = \frac{a^2(1-m^2)}{(1-m)^2}, \quad \text{onde} \quad B = \pm \frac{a}{1-m} \sqrt{(1-m^2)}.$$

Perciò; la curva è una ellisse, i di cui assi principali sono $\frac{2a}{1-m}$, $\frac{2a}{1-m}\sqrt{(1-m^2)}$, ed il parametro $2a(1+m)$.

Il punto F è altronde uno dei fochi, la di cui definizione trovasi compresa in quella della ellisse (§ 96).

Pongasi infatti, $x = a$ nella equazione

$$y^2 = (1-m^2)\left(\frac{2a}{1-m}x - x^2\right); \text{ ne risulta}$$

$$y^2 = (1-m^2)\frac{\alpha^2(1+m)}{1-m} = \alpha^2(1+m)^2;$$

onde $y = \pm\alpha(1+m) = \pm\frac{B^2}{A}$;

valore che si è già veduto (§ 116) esser quello dell'ordinata che passa per ciascuno dei fochi.

La costruzione del primo asse AB si riduce a trovare sopra GF due punti A e B tali, che abbiasi

1.° $m:1 :: FA : AG$; onde $1+m : m :: FG : FA$.

2.° $m : 1 :: FB : BG$; onde $1-m : m :: FG : FB$

e queste sono le due *quarte proporzionali* facili ad ottenersi,

In quanto al secondo asse, conoscendosi già il foco F, basta descrivere da questo punto come centro e con un raggio OA, metà di AB, un'arco di cerchio che tagli la perpendicolare, innalzata dal punto O, in due punti C, D.

Il secondo foco F′ si ottiene prendendo

$$OF' = OF.$$

Sia *finalmente* $m > 1$, nel qual caso il coefficiente di x^2 è negativo nell'equazione (3).

Questa può ricever la forma

$$y^2 = (m^2-1)\left(\frac{2\alpha}{m-1}x + x^2\right),$$

e dal confrontarla con

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(2Ax + x^2), \text{ si ottiene}$$

$$A = \frac{\alpha}{m-1}, \quad \frac{B^2}{A^2} = m^2-1; \text{ onde}$$

$$\frac{B^2}{A} = \alpha(m+1)\ ,\ \text{e}\ B = \pm\frac{\alpha}{m-1}\sqrt{(m^2-1)},$$

dunque la curva è *un'iperbole* il di cui primo asse, o l'asse trasverso, è $\frac{2\alpha}{m-1}$, il 2.° $\frac{2\alpha}{m-1}\sqrt{(m^2-1)}$, ed il parametro è $2\alpha(m+1)$.

Facendo nell'equazione $x=\alpha$, ne risulta

$$y^2 = (m^2-1)\frac{\alpha^2(1+m)}{1-m} = \alpha^2(m+1)^2;\ \text{onde}$$

$$y = \pm\alpha(m+1) = \pm\frac{B^2}{A};$$

il che prova, essere il punto F uno de' fochi della curva.

La costruzione degli assi potrebbe effettuarsi come per l'ellisse ma conviene osservare che una tal costruzione deve formarsi da destra a sinistra del punto F; poichè, facendo nell'equazione, $y=o$, si ottiene

$$\frac{2\alpha}{m-1}x + x^2 = o\ ,\quad \text{onde}\quad x\left(\frac{2\alpha}{m-1} + x\right) = o;$$

il che ci dà $x=o$, ed $x = -\frac{2\alpha}{m-1}$

Perciò i vertici, A, B' sono situati da una stessa parte rapporto al punto F. Accadeva l'opposto nella ellisse.

N. B. Nei tre caratteri, $m<1, m=1,\ m>1$, può rinvenirsi il motivo delle denominazioni attribuite alle tre curve

L'ipotesi $m<1$ ci dà l'Ellisse o la curva per *deficenza*,

$m=1$... la Parabola o la curva per *eguaglianza*

$m>1$ . . . la Iperbole o la curva per *eccesso*.

Questo motivo si rinviene ancora nelle relazioni

$$y^2 < 2px, \quad y^2 = 2px, \quad y^2 > 2px,$$

dedotte dall' equazione $y^2 = 2px + qx^2$, secondo che è $q < o$, $= o$, $> o$.

118. Alla retta LL' della ellisse e dell' iperbole è stato dato, come a quella della parabola, il nome di *direttrice*.

Nella parabola, che ha per equazione $y^2 = 2px$, per ottenere la direttrice, basta prendere, a sinistra dell' origine, una distanza $AG = AF = \frac{p}{2}$, cioè, una distanza eguale al *quarto del parametro*, e poi innalzare nel punto G una normale.

Nell' ellisse, che ha per equazione

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2,$$

essendosi trovato precedentemente $\frac{B^2}{A^2} = 1 - m^2$,

cioè $m^2 = 1 - \frac{B^2}{A^2} = \frac{A^2 - B^2}{A^2} = \frac{c^2}{A^2}$, onde $m = \frac{c}{A}$;

e perciò essendo cognito il rapporto $m : 1$, ed essendo data la posizione dei punti A, F; basta, per determinare il punto G, costruire la quarta proporzionale

$$c : A :: AF : AG.$$

Similmente abbiamo per l' iperbole

$m^2 - 1 = \frac{B^2}{A^2}$, onde $m^2 = \frac{A^2 + B^2}{A^2}$, cioè $m = \frac{c}{A}$.

Finalmente si vede che, in ciascuna di queste due ultime curve, esistono due direttrici situate ad una egual distanza dal centro, sul prolungamento di AB per l' ellisse, e fra i punti A, B', per l' iperbole.

§ III. *Trasformazione dell' equazione generale di secondo grado a due variabili*

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=o.$$

119. *Introduzione*. Per completare le nozioni preliminari sulle curve di secondo grado, ci resta di far vedere che l'ellisse, l'iperbole, e la parabola, come le abbiamo definite precedentemente, *sono le sole curve contenute in una qualunque equazione di secondo grado a due variabili.*

A primo aspetto, sembra difficile il concepire che possa esservi identità fra tutte le curve rappressentate da una equazione così complicata come questa, e fra quelle curve che hanno le equazioni della forma

$$My^2+Nx^2=P, \quad o \quad y^2=Qx:$$

rappresentando *la prima* di queste due una ellisse o un'iperbole, secondo che M, N, P, sono tutte tre grandezze positive (§ 101), oppure, essendo M positivo, sia N negativo, e P negativo o positivo (§§ 109 e 110); e *la seconda* potendo paragonarsi con la equazione della parabola.

Ma riflettendo che col sostituire in queste due equazioni, in luogo di x ed y, i valori

$$x=x\cos\alpha+y\cos\alpha'+a$$

$$y=x\,\text{sen}\,\alpha+y\,\text{sen}\,\alpha'+b;$$

si passa (§ 89) da un sistema di coordinate rettangolari ad un sistema obliquo, e di origine diversa, scorgeremo che l'equazione che ne risulta è della forma medesima dell'equazione completa. Ora, è evidente che questa trasformazione di coordinate non altera in alcun modo la natura della curva; soltanto l'equazione che la rappresenta, attesochè i nuovi assi ai quali la curva vien riferita si trovano in una situazione qualunque riguardo alla

curva, resta più complicata di quello che lo fosse quando essa era riferita ai suoi assi principali.

Possiamo dunque concludere, per analogia, che, allorquando una curva espressa da un'equazione completa di secondo grado sia stata costruita per mezzo di questa equazione, esistono nel piano di questa curva degli altri sistemi di assi rapporto ai quali l'equazione è più semplice, e suscettibile di ricevere l'una o l'altra delle due forme qui sopra indicate.

120. Sviluppiamo questa proposizione, col far vedere che qualunque equazione di secondo grado a due variabili, come

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o \ldots (1)$$

può sempre, da una trasformazione di coordinate, venir ridotta all'una o all'altra delle due forme

$$My^2 + Nx^2 = P, \qquad y^2 = Qx.$$

È necessario però di prima avvertire, che niente c'impedisce di supporre che la curva sia fin da principio riferita ad assi rettangolari; poichè se non lo fosse, si potrebbe (§ 93), conservando la stessa origine, ed il medesimo asse delle x, renderla rettangolare; e l'equazione risultante, essendo della stessa forma della equazione (1), sarebbe quella sulla quale dovrebbe operarsi.

Previa questa osservazione, potremo prima dimostrare che, con un cangiamento di direzione di assi, *può sempre farsi svanire il termine in xy.*

A tale oggetto, prenderemo le formole

$$x = x \cos \alpha - y \,\text{sen}\, \alpha,$$

$$y = x \,\text{sen}\, \alpha + y \cos \alpha,$$

per mezzo delle quali (§ 90) si passa da un sistema rettangolare ad un'altro della medesima specie. L'angolo α, che è qui una indeterminata (§ 95),

dev' essere calcolato in modo che verifichi la condizione che l' equazione trasformata resti priva del termine in xy, cioè in guisa che venga ad *annullarsi* il coefficiente di questo termine.

Dalla sostituzione dei valori ora addotti di x e di y nella equazione (1), otterremo.

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l}
A\cos^2\alpha & y^2+2A\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha & xy+A\,\mathrm{sen}^2\alpha & x^2+D\cos\alpha & y+D\,\mathrm{sen}\,\alpha & x+F=0 \\
-B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha & \quad +B\cos^2\alpha & \quad +B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha & \quad -E\,\mathrm{sen}\,\alpha & \quad +E\cos\alpha & \\
+C\,\mathrm{sen}^2\alpha & \quad -B\,\mathrm{sen}^2\alpha & \quad +C\cos^2\alpha & & & \\
 & \quad -2C\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha & & & & \ldots\ldots(a).
\end{array}$$

Ma il termine in xy, per ipotesi, deve disparire da questa equazione. Dobbiamo dunque trovare per α un tal valore, che sia

$$2A\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha+B\cos^2\alpha-B\,\mathrm{sen}^2\alpha-2C\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha=0$$

ovvero,

$$(A-C).\,2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha+B(\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha)=0,$$

o, attesochè

$$\mathrm{sen}\,2\alpha=2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha,\quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha,$$

$$(A-C).\,\mathrm{sen}\,2\alpha+B\cos 2\alpha=0;$$

equazione da cui deducesi, dopo la divisione per 2α,

$$\mathrm{tang}\,2\alpha=-\frac{B}{A-C}.$$

E siccome una tangente può passare per tutti i stati di grandezza positiva o negativa, anche infinita, ne siegue che l' angolo α sia suscettibile di una determinazione reale, comunque siano i coefficienti A, B, C; e perciò *è sempre possibile di fare disparire il termine in xy*.

Siano AX, AY gli assi primitivi; per costruire i nuovi, guidiamo dal punto A (fig. 79) una retta AL che formi con AX un' angolo che abbia per tan-

gente $-\frac{B}{A-C}$; dividiamo poi quest' angolo in due parti eguali con la retta AB, che sarà il nuovo asse delle x; ed AC perpendicolare ad AB sarà il nuovo asse delle y.

Le formole (t.° 3.° § 85 e 87)

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1+\tang^2 2\alpha)}},\ \sen 2\alpha = \cos 2\alpha \tang 2\alpha,$$

danno altronde per i valori di cos 2α, sen 2α, corrispondenti a quelli di tang 2α,

$$\cos 2\alpha = \frac{A-C}{\sqrt{[(A-C)^2+B^2]}},\ \sen 2\alpha = \frac{-B}{\sqrt{[(A-C)^2+B^2]}}.$$

In quanto ai valori di sen α, cos α, che entrano nei coefficienti della equazione (2), potranno ottenersi dalle formole (t.° 3.° § 103)

$$\sen \alpha = \sqrt{\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)},\ \cos \alpha = \sqrt{\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)}.$$

Riportando questi valori nella (2); si giungerà alla equazione

$$My^2+Nx^2+Ry+Sx+F=0\ .\ .\ .\ (3),$$

priva del termine in xy, nella quale la quantità indipendente da x e da y è restata quella stessa della equazione (1).

121. Procuriamo ora, con una traslazione di origine, di fare svanire i termini del primo grado in x ed in y. Perciò faremo nella (3),

$$x=x+a,\ y=y+b;\ \text{per avere}$$

$$My^2+Nx^2+(2Mb+R)y+(2Na+S)x$$
$$+Mb^2+Na^2+Rb+Sa+F=0\ \dots\ (4)$$

e, volendosi che i termini in x ed in y svaniscano,

deve aversi $\begin{cases} 2Mb+R=o \\ 2Na+S=o \end{cases}$ onde $b=-\frac{R}{2M}, a=-\frac{S}{2N}$,

Prendendo ad analizzare questi valori di a, b, potremo fissare varie ipotesi che qui esamineremo successivamente.

In primo luogo : I coefficienti M, N, dei quadrati y^2 ed x^2 *possono essere ambedue diversi da o.*

In questo caso, avendo a, b, valori *reali* e finiti, potrà trasportarsi l'origine in un nuovo punto

A' che ha per coordinate $-\frac{S}{2N}, -\frac{R}{2M}$, e per il

quale l'equazione della curva, riferita agli assi A'X'', A' Y'', avrà la forma $My^2+Nx^2=P$:

indicando P ciò che diviene

$$-(Mb^2+Na^2+Rb+SA+F)$$

quando siansi sostituiti ad a, b, i loro valori.

Potrebbe aversi, tanto $R=o$, che $S=o$; nel qual caso b o a si annullerebbe; cioè la nuova origine si troverebbe situata o sull'asse AX' o sull'asse AY'.

Perciò, finchè M ed N sono diversi da o, *potranno sempre farsi scomparire i termi lineari* in x ed in y.

122. *Secondariamente* : supponiamo che *uno dei quadrati manchi nell'equazione* ; sia, per esempio, $N=o$; M, R ed S, o almeno M, ed S essendo diversi da o.

In questo caso, il valore di b è reale e finito; ma quello di a si presenta sotto la forma dell'*infinito*; e siccome non potrebbe trasportarsi l'origine ad una distanza infinita, vien da ciò dimostrata l'impossibilità della proposta trasformazione.

In fatti, per $N=o$, riducendosi la (3) ad

$$My^2+Ry+Sx+F=o,$$

l' equazione (4) risultante dalla sostituzione di $x+a$, $x+b$ in luogo di x, y, sarà

$$My^2+(2Mb+R)y+Sx+Mb^2+Rb+Sa+F=0.$$

Da questa equazione, il di cui termine in x non racchiude le indeterminate a, b, veniamo a conoscere che può disporsi di queste quantità in modo da fare svanire il termine in x; ma diciamo esser anche possibile di *annullare il termine in y e la quantità indipendente da x ed y.*

Poichè, facendo $2Mb+R=0$, $Mb^2+Rb+Sa+F=0$,

ne risulta $b=-\frac{R}{2M}$, $a=-\frac{Mb^2+Rb+F}{S}$,

valori essenzialmente reali e finiti, poichè si è supposto M ed S diversi da 0.

Potrebbe anch' essere $R=0$, nel qual caso si *annullerebbe* b, ed il valore di a si ridurrebbe ad

$a=-\frac{F}{S}$. E la nuova origine si troverebbe allora sull' asse AX'. Con questa trasformazione si riduce l' equazione alla forma.

$$My^2+Sx=0,\ \text{o}\ y^2=Qx,\ (\text{facendo}\ -\frac{S}{M}=Q).$$

Concludiamo da ciò che, qualora l' annullamento del rettangolo xy della (1) abbia dato luogo a fare scomparire il termine in x^2, ma non quello in x; potrà farsi *svanire il termine in y e la quantità indipendente da x e da y.*

Sia, al contrario, $M=0$; N, R ed S, o almeno N ed R *essendo diversi da* 0; si mostrerebbe in egual guisa, che l' equazione può esser ridotta alla forma $Nx^2+Ry=0$, o $x^2=Qy$, (ponendo

$-\frac{R}{N}=Q$); ma (§ 93) questa equazione

si riduce alla precedente col cangiare x in y ed y in x.

123. *Osservazione*. Non può aversi nel tempo stesso $M = o$, $N = o$; poichè ponendo per M ed N i loro valori dedotti dalla (1) (ved. § 120), ne risulterebbe

$$A \cos^2 \alpha - B \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + C \operatorname{sen}^2 \alpha = o,$$

$$A \operatorname{sen}^2 \alpha + B \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha = o;$$

e sottraendo queste due equazioni l'una dall'altra

$$(A - C)(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - B.\, 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = o,$$

ovvero, $(A - C) \cos 2\alpha - B \operatorname{sen} 2\alpha = o,$

equazione che, divisa per $\cos 2\alpha$, ci dà

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{A - C}{B}.$$

Questo risultato per concordarsi con il valore di $\operatorname{tang} 2\alpha$ ottenuto coll'annullamento del termine in xy, cioè $\operatorname{tang} 2\alpha = -\frac{A - C}{B}$, dovrebbe essere

$$\frac{A - C}{B} = -\frac{B}{A - C}, \quad \text{o} \quad \overline{A - C}^2 + B^2 = o,$$

ciò che non può darsi che nel caso di $A = C$ e $B = o$ *ipotesi inamissibile*, poichè si è supposto da principio che l'equazione (1) contenesse il termine in xy.

124. *In terzo luogo:* Supponiamo che sia nel tempo stesso $N = o$, $S = o$; cioè che l'annullamento del termine in xy abbia cagionato *l'annullamento simultaneo dei termini in* x^2 *ed* x.

In tal caso, il valore di b', trovato n° 121, è reale e finito; ma quello di a si presenta sotto la forma $\frac{o}{o}$.

Per interpretare questo risultato, convien risalire all'equazione (3) che si riduce allora ad

$$My^2+Ry+F=o \text{ , d' onde}$$

$$y=-\frac{R}{2M}\pm\frac{1}{2M}\sqrt{(R^2-4FM)}.$$

Questa nuova equazione, che non racchiude più che una sola variabile, rappresenta (§ 46) *un sistema di due rette* EF, GH (fig. 79) *parallele* all' asse AX'. Non sarebbe dunque più questa una curva propriamente detta che verrebbe ad ottenersi, ma bensì *una delle varietà* comprese nella equazione generale di secondo grado a due variabili, varietà che apprenderemo or ora a distinguere nelle diverse classi del curve.

I valori $b=-\frac{R}{2M}$, $a=\frac{o}{o}$, il secondo de' quali è sotto forma *indeterminata*, si accordano altronde benissimo con il caso particolare di cui si tratta.

In fatti, portando sull' asse AY' una distanza

$AI=-\frac{R}{2M}$, se dal punto I si guidi la IX'' parallela ad AX', potremo prendere IX'' per nuovo asse delle x, e per nuovo asse delle y una perpendicolare A' Y'' innalzata da qualunque punto della retta IX''; e così l' equazione del sistema delle due parallele EF, GH, sarà ridotta alla forma

$$y=\pm\frac{1}{2M}\sqrt{(R^2-4FM)}=\pm K.$$

Con ragione, dunque l' ascissa della nuova origine resta del tutto *indeterminata*.

Si raccoglie da tuttociò, che deve riguardarsi come stabilito rigorosamente, che *qualunque equazione di secondo grado a due variabili può, mediante una doppia trasformazione di coordinate essere ridotta ad una delle due forme*

$$My^2 + Nx^2 = P\ ,\quad y^2 = Qx\ ;$$

fuori che nel caso del tutto particolare, qual' è quello in cui collo scomparire il termine in xy, dispariscono ancora il quadrato e la prima potenza di una stessa variabile; ma si sa che allora la curva si riduce ad un *sistema di due rette parallele.*

125. *Discussione* delle equazioni

$$My^2+Nx^2=P\ ,\quad y^2 = Qx.$$

Partiremo dal supporre che nella prima il coefficiente M sia *positivo*, poichè, se non lo fosse, basterebbe cangiare i segni ai due membri.

Ciò posto, possono presentarsi diversi casi, rapporto ai segni ed ai valori degli altri coefficienti.

In *primo luogo*: siano N e P *positivi* nel tempo stesso con M.

L' equazione $My^2+Nx^2=P$ rappresenta (§ 101) un' ellisse:

1.ª *Varietà.* L' ellisse diverrà un cerchio (§ 102) nel caso particolare di $M=N$.

2.ª *Varietà.* N *positivo* e P *negativo*. In questo caso l' equazione è del tutto impossibile, perchè a qualunque valore di x corrisponderebbero due valori imaginarj per y. È allora che la curva dicesi *imaginaria.*

3.ª *Varietà.* Sia N *positivo*, e $P=o$. L' equazione $My^2+Nx^2=o$ non può, evidentemente, essere addempita che dal sistema ($y=o$, $x=o$); dunque la curva si riduce ad *un punto.*

In secondo luogo. Supponiamo N e P *negativi*; l' equazione $My^2-Nx^2=-P$, rappresenta (§ 109) un' iperbole riferita al suo asse trasverso come asse delle x.

In terzo luogo. Se N è *negativo*, e P *positivo*, l' equazione $My^2-Nx^2=P$ è (§ 110) quella di un iperbole riferita al suo secondo asse.

1.ª *Varietà.* $N=-M$, essendo P *positivo o negativo*; avremo (§ 106 un' iperbole *equilatera*.

2.ª *Varietà.* N *negativo* e $P = o$; l'equazione, riducendosi ad $My^2 - Nx^2 = o$, ci dà

$$y = \pm \sqrt{\left(\frac{N}{M}\right)},$$

e rappresenta ***un sistema di due rette che si tagliano nell' origine.***

Sono queste le sole circostanze relative alla prima equazione.

In quanto alla seconda equazione $y^2 = Qx$, può accadere che sia Q *positivo* o *negativo*.

Nel primo caso, l'equazione rappresenta evidentemente una parabola il di cui parametro $2p$ è eguale al coefficiente Q.

Nel secondo, siccome, col cangiare x in $-x$; l'equazione $y^2 = -Qx$, diviene $y^2 = Qx$, ne siegue che la curva resti ancora una parabola; soltanto che viene a dirigersi nel senso delle x negative; ma, ripiegando la figura a seconda dell' asse delle y, si torna a dare alla curva la consueta situazione.

Varietà. Il caso discusso n.º 124 nel quale si suppose $N = o$, $S = o$, è riguardato come una varietà della parabola; attesochè $N = o$, è il carattere generale delle parabole.

Si è trovato (§ 124)

$$y = -\frac{1}{2M} \pm \frac{1}{2M} \sqrt{(R^2 - 4MF)};$$

qui, secondo che è $R^2 - 4MF > o$, $= o$, $< o$; il risultato rappresenta ***due rette parallele***, ***una sola retta***, o ***due rette imaginarie.***

Risulta da questa discussione, che qualunque equazione di secondo grado a due variabili, non può mai rappresentare che: *o una ellisse*, le di cui varietà, sono *il cerchio*, *un punto*, *una curva imaginaria:*

o *una iperbole*, avendo per varietà *l'iperbole equilatera, ed un sistema di due rette che si tagliano:*

o, in infine *una parabola*, le di cui varietà sono *un sistema di due rette parallele*, *una sola linea retta*, o *due rette imaginarie*.

126. Verrà ripresa, nel 4.° Capitolo, la discussione dell' equazione generale per la trasformazione delle coordinate.

Ci limiteremo, per ora, a calcolare i valori generali dei coefficienti M, N, corrispondenti a quelli della tang 2α perchè ci forniscono essi, con la massima semplicità, un carattere distintivo per ciascuna delle tre curve.

Abbiamo(§120) $\left\{\begin{array}{l} M = A\cos^2\alpha - B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + C\,\mathrm{sen}^2\alpha, \\ N = A\,\mathrm{sen}^2\alpha + B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha. \end{array}\right\}$

Ciò posto, dall' addizionare queste equazioni, avremo $M+N=A+C \ldots . (1),$

(attesochè $\mathrm{sen}^2 A + \cos^2\alpha = 1$);

e, dalla loro sottrazione, risulterà

$$M-N=(A-C)(\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\alpha)-B.2\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

ovvero, $M-N=(A-C)\cos 2\alpha - B\,\mathrm{sen}\,2\alpha;$

ma si è ottenuto (§ 120)

$$\cos 2\alpha = \frac{A-C}{\sqrt{[(A-C)^2+B^2]}},$$

$$\mathrm{sen}2\alpha = \frac{-B}{\sqrt{[(A-C)^2+B^2]}};$$

dunque $M-N=\dfrac{(A-C)^2+B^2}{\sqrt{[(A-C)^2+B^2]}}$, o riducendo,

$$M-N=\sqrt{[(A-C)^2+B^2]} \ldots . (2).$$

$$\text{Perciò,}\left\{\begin{aligned} M &= \frac{A+C}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{[(A-C)^2+B^2]},\\ N &= \frac{A+C}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{[(A-C)^2+B^2]}.\end{aligned}\right\}$$

Dal moltiplicare queste due espressioni fra loro, si otterrà

$$MN = \frac{(A+C)^2}{4} - \frac{1}{4}(\overline{A-C}^2 + B^2) = \frac{1}{4}(4AC - B^2)$$

Si scorge di quì: che due coefficienti M ed N hanno lo stesso segno, ogni qual volta $4AC - B^2$ sia una quantità *positiva*, o piuttosto $B^2 - 4AC$ *negativa*: che questi coefficienti hanno segno contrario, se $B^2 - 4AC$ è *positivo*: e che l'uno di essi è nullo se $B^2 - 4AC = o$. Dunque potremo concludere che le tre curve sono caratterizzate nel modo seguente.

$B^2 - 4AC < o$ l'ellisse, e le sue varietà,

$B^2 - 4AC = o$ la parabola e le sue varietà,

$B^2 - 4AC > o$ l'iperbole e le sue varietà.

127. La relazione $M + N = A + C$ prova che, quando un'equazione di secondo grado appartiene ad un'*iperbole* equilatera, nel qual caso deve aversi $N = -M$ cioè $M+N = o$, deve aversi pur'anche $A+C = o$, cioè $C = -A$.

Reciprocamente $A+C = o$ dà $M+N = o$, cioè $N = -M$, e l'iperbole è equilatera.

Considerazioni generali sulle curve di 2° gr.°
Diametri conjugati dell'ellisse e dell'iperbole.
Assi conjugati della parabola.

128, Ciascuna delle tre curve di secondo grado presenta nel suo corso un carattere che gli è tutto

proprio, e che perciò può servire a distinguerla dalle altre due.

Così, l'ellisse, dalla sua definizione (§ 96), risulta una curva *rientrante e chiusa* come il cerchio, o una curva *limitata in tutti i versi.*

L'iperbole è una curva composta di *due rami eguali ed opposti* che si estendono *ambedue all'infinito.*

La parabola, infine, si estende *indefinitamente in un sol verso*, e non ha che un ramo unico.

Premessi questi caratteri, consideriamo di nuovo le equazioni

$$My^2+Nx^2=P \ldots (1) \quad y^2=Qx \ldots (2)$$

e supponiamo che, nel ricercare di stabilire la posizione di un certo luogo geometrico, rapporto ad assi obliqui, siamo giunti all'una o all'altra di queste equazioni per rappresentare questo luogo geometrico: dico che *la prima appartiene ad un' ellisse o ad una iperbole*, secondo che M ed N hanno *lo stesso segno* o *segni contrarj*, e che *la seconda appartiene ad una parabola.*

In fatti, siano, in prima, M ed N *positivi*; ancor P deve supporsi *positivo*, altrimenti l'equazione (1) sarebbe *impossibile.*

Deduciamo, dall'equazione (1),

$$y=\pm\sqrt{\left[\frac{N}{M}\left(\frac{P}{N}-x^2\right)\right]};$$

Da questo risultato chiaramente apparisce che, dando ad x (fig. 80) valori positivi o negativi, aritmeticamente minori di $\sqrt{\frac{P}{N}}$, si ottengono per y valori reali; ma che per qualunque valore di x, maggiore di $\pm\sqrt{\frac{P}{N}}$, i valori corrispondenti di y so-

no imaginarj. È dunque limitata la curva nel verso degli x negativi da due parallele all' asse delle y, condotte in distanze dall' origine indicate da

$x=+\sqrt{\frac{P}{N}}$, $x=-\sqrt{\frac{P}{N}}$; per ciascuno de' quali valori si trova $y=\pm o$, il che dimostra puranche che la curva è tangente a queste due parallele.

Risolvendo l'equazione rapporto ad x, si dimostrerebbe ancora che dessa è limitata, nel verso delle y positive e in quello delle y negative, da due parallele all' asse delle x, condotte dalle distanze

$y=+\sqrt{\frac{P}{M}}$, $y=-\sqrt{\frac{P}{M}}$; e che la curva è tangente a queste due rette.

Dunque la curva è un *ellisse.*

129. Siano adesso M *positivo*, N *negativo*, e P *negativo* o *positivo*; l' equazione risoluta, rapporto ad y, ci dà

$$y=\pm\sqrt{[\frac{N}{M}(x^2-\frac{P}{N})]}; \text{ o } y=\pm\sqrt{[\frac{N}{M}(x^2+\frac{P}{N})]}.$$

Nel primo caso si scorge che, ai valori di x (fig. 81) positivi o negativi, aritmeticamente minori di $\sqrt{\frac{P}{N}}$, corrispondono valori imaginarj di y;

ma dal supporre i valori di x maggiori di $\sqrt{\frac{P}{N}}$, si ottengono per y valori sempre reali, qualunque valore si attribuisca ed x. Perciò, la curva non ha verun punto fra le due parallele all' asse delle y, condotte dalle distanze $x=+\sqrt{\frac{P}{N}}$ e $-\sqrt{\frac{P}{N}}$;

ma essa si estende indefinitamente a destra ed a

sinistra di queste due parallele, alle quali è tangente, giacchè da $x=\pm\sqrt{\frac{P}{N}}$ risulta $y=\pm o$.

Nel secondo caso, è chiaro, che a qualunque valore di x (fig. 82) positivo o negativo, corrispondono sempre valori reali di y.

Da $x=o$, si ottiene $y=\pm\sqrt{\frac{P}{M}}$; e questo valore è il *minimo* di quelli che può ricevere y; perciò la curva non incontra l'asse delle x, ed è composta di due rami opposti che si estendono indefinitamente a destra ed a sinistra dell'asse delle y, l'uno sopra, l'altro sotto l'asse delle x.

Dunque, nei due casi la curva è *un' iperbole.*

130. Non ci rimane che di discutere l'equazione

$$y^2 = Qx$$

nella quale può sempre supporsi Q positivo, poichè, se fosse negativo, basterebbe di cangiare x in $-x$, il che si ridurrebbe a variare la posizione della figura.

Ora, da questa equazione si deduce $y=\pm\sqrt{Qx}$, e si vede che da qualunque valore (fig. 83) positivo di x si ottengono costantemente valori reali per y; ma dando ad x valori negativi, risultano per y valori imaginarj; perciò la curva si estende indefinitamente a destra dell' asse delle y, e non ha alcun punto a sinistra di quest' asse, che è altronde tangente alla curva, poichè per $x=o$, si trova $y=\pm o$.

Dunque la curva è una parabola.

131. *Nozioni sopra i diametri* nelle curve di secondo grado.

Assume, in generale, il nome di DIAMETRO *una linea*, RETTA O CURVA, *che passa nel mezzo di*

tutte le corde parallele fra loro e condotte con una direzione fissa benchè possa esser qualunque.

Risulta da questa definizione che ciascuno dei due assi (fig. 80 e 82), ai quali si è supposto (§§ 128, e 129) riferita la curva, è un diametro. In fatti, poichè ad un medesimo valore di x corrispondono due valori di y eguali e con segno contrario, e reciproçamente, ne siegue che l' asse delle x passi per mezzo di tutte le corde parallele all' asse delle y; e che questo qui passi per mezzo di tutte le corde parallele all' asse delle x.

Di più, siccome ciascuno di questi due diametri ha la proprietà di dividere in due parti eguali tutte le corde parallele all' altro, si è convenuto di caratterizzarli ambedue con il nome di *diametri conjugati*; e l' equazione $My^2+Nx^2=P$ è allora l' equazione di una ellisse o di una iperbole, *riferita ad un sistema di diametri conjugati.*

Gli assi principali di queste due curve sono quelli che formano un sistema di *diametri conjugati perpendicolari fra loro*, poichè la loro equazione ha la forma poc' anzi addotta.

In quanto alla parabola (§ 130), l' asse delle x (fig. 84) è esso solo *un diametro* ; e si dice, in questo caso che la curva è *riferita ad un diametro* come asse delle x; quello delle y è tangente alla curva. Il sistema di questi due assi si chiama *un sistema di assi conjugati.*

Il primo asse principale della parabola è dunque un diametro ; e gli assi conjugati sono *perpendicolari fra loro.*

132. Ora ci sarà facile il dimostrar con l' analisi che, nelle tre curve di secondo grado, tutti i *diametri sono linee rette* che, per l' ellisse e per l' iperbole, *passano per il centro*, e per la parabola, sono *parallele all' asse principale.*

Per introdurci in questa ricerca, proporremo il quesito nel modo seguente: *Trovare l' equazione*

del luogo geometrico dei punti medj di una serie di corde della curva, parallele fra loro e guidate in una direzione arbitraria.

Un quesito di tal' indole sarà agevole a risolversi, riducendosi a combinare l' equazione della curva con quella di una retta qualunque, a determinare le coordinate dei due punti d'intersecazione, ed a dedurne in seguito le coordinate del punto medio della distanza che passa fra questi due punti.

Ellisse. L' equazione di questa curva riferita al suo centro ed ai suoi assi (fig. 84) essendo

$$A^2y^2+B^2x^2 = A^2B^2 \ . \ . \ . \ (1)$$

sarà quella di una retta MM', $y=ax+b$... . (2)

Ponendo nella (1) il valore di y della (2), avremo

$$(A^2a^2+B^2)x^2+2A^2ab.x+A^2(b^2-B^2)=0 \ldots (3)$$

Questa equazione risoluta ci darebbe le ascisse dei due punti M, M'; ma si rende inutile un tal calcolo. In fatti, siano x', y' ed x'', y'', le coordinate di questi due punti, avremo, (§ 60) per le coordinate α, β del punto medio N,

$$\alpha=\frac{x'+x''}{2}, \quad \beta=\frac{y'+y''}{2};$$

per altra parte, sappiamo che, in qualunque equazione di secondo grado, il coefficiente del secondo termine, preso con segno contrario, è eguale alla somma delle radici; avremo dunque in tal caso,

$$x'+x''=-\frac{2A^2ab}{A^2a^2+B^2}; \text{ e perciò },$$

$$\frac{x'+x''}{2}; \text{ ossia } \alpha=-\frac{A^2a\,b}{A^2a^2+B^2}.$$

Ora, per ottenere il valore di β, potrebbe sostituirsi nella (1) ad x il suo valore dedotto dalla (2) risulterebbe un' equazione in y in cui la metà del

coefficiente del secondo termine, preso con segno contrario, ci darebbe il valore di β; ma per operare con maggior semplicità, osserveremo, che siccome il punto α, β appartiene alla corda, β altro non è che il valore di y corrispondente ad $x=0$ nella equazione (2); e troveremo con ciò

$$\beta = - \frac{A^2a^2b}{A^2a^2+B^2} + b = \frac{B^2b}{A^2a^2+B^2}.$$

Che se adesso intenderemo diviso il valore di β per quello di α, otterremo $\frac{\beta}{\alpha} = - \frac{B^2}{A^2a}$.

Questo risultato indipentente dalla quantità b che fissa la posizione della corda MM' (determinandone a la direzione), sarebbe ancora il medesimo per il punto medio (β', α') di qualunque altra corda parallela alla prima; cioè si avrebbe

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = - \frac{B^2}{A^2a}, \quad \frac{\beta''}{\alpha''} = - \frac{B^2}{A^2a}, \ldots\ldots$$

Dunque, rappresentando, in generale, con y ed x le coordinate di tutti i punti medii, la relazione

$$\frac{y}{x} = - \frac{B}{A^2a}, \text{ o } y = - \frac{B^2}{A^2a}\, x$$

conviene ad ognuno di essi, e perciò, caratterizza il loro *luogo geometrico*. Ma questa equazione è (§ 43) quella di una retta che passa per l'origine. Dunque, *tutti i diametri* dell'ellisse *sono linee rette che passano per il centro.*

Reciprocamente, *qualunque linea retta condotta per il centro è un diametro*; poichè, dal rappresentare con a' la tangente dell'angolo che fa questa retta con l'asse delle x, e dallo stabilire la relazione $a' = - \frac{B^2}{A^2a}$, se ne deduce $a = - \frac{B^2}{A^2a'}$;

e guidando una serie di corde parallele che formino con l' asse delle x l' angolo corripondente a questo valore di a, avremo, da quanto si è detto, per l' equazione del luogo geometrico dei punti medj di queste corde

$$y = -\frac{B^2}{A^2a}x, \quad o \quad y = a'x,$$

che altro non è che l' equazione della retta data.

Iperbole. Per questa curva essendo i calcoli del tutto simili, ci dispenseremo dal ripeterli.

Si troverebbe, per l' equazione generale dei diametri (fig. 85), $y = \frac{B^2}{A^2a}x$,

cioè basterebbe cangiare $-B^2$ in B^2 nei risultati precedenti.

Parabola. Combiniamo la sua equazione

$$y^2 = 2px \ldots\ldots (1)$$

con quella di qualunque retta MM′ (fig. 86)

$$y = ax + b \ldots\ldots (2)$$

Da questa si deduce $x = \frac{y-b}{a}$; onde, sostituendo nella (1) il valore di x, ed ordinando,

$$y^2 - \frac{2p}{a}y + \frac{2pb}{a} = o \ldots\ldots (3).$$

Da ciò otteniamo, per valore dell' ordinata β del punto medio N, $\beta = \frac{y' + y''}{2} = \frac{p}{a}$;

risultato indipendente dalla quantità b, e che conviene al punto medio di qualunque altra corda parallela alla prima.

Dunque, chiamando y l' ordinata generica di tut-

ti i punti medj; avremo $y=\frac{p}{a}$, per equazione del *loro luogo geometrico*; ma questa equazione è ad evidenza quella di una retta parallela all' asse delle x; perciò; *tutti i diametri della parabola sono rette parallele all' asse principale.*

Reciprocamente, qualunque retta, come LL' parallela al primo asse, è un diametro; e può facilmente determinarsi la direzione delle corde che essa divide in due parti eguali.

Sia, infatti, y' l' ordinata costante di questa retta; ponendo $y'=\frac{p}{a}$, cioè $a=\frac{p}{y'}$, si condurranno delle corde che formino con l' asse delle x l' angolo corrispondente a questa tangente; e l' equazione del luogo geometrico dei loro punti medj, sarà

$$y=\frac{p}{a}, \quad \text{o} \quad y=y',$$

equazione che altro non è che quella della retta data.

133. *Conseguenze*. La relazione $a'=-\frac{B^2}{A^2a}$ ottenuta n° 132, dalla quale si deduce $aa'=-\frac{B^2}{A^2}$, dà luogo ad una conseguenza di molta importanza:

Sia un qualunque diametro LL' (fig. 84) che ha per equazione $y=a'x$, quella del diametro II', parallello alle corde divise dal primo in due parti eguali, è $y=-\frac{B^2}{A^2a'}x$, o $y=ax$.

Reciprocamente, dal prendere in considerazione il diametro II' che ha per equazione $y=ax$,

si trova che, quella del diametro parallelo alle corde che II′ divide in due parti equali, è

$$y = -\frac{B^2}{A^2 a}\, x\,, \quad \text{o} \quad y = a'x\,;$$

cosichè questo secondo diametro altro non è che LL′.

Di quì è che LL′ ed II′ formino (§ 131) *un sistema di diametri conjugati*, poichè ciascuno di essi divide in due parti eguali tutte le corde parallele all' altro.

Siccome poi il diametro LL′ è stato condotto ad arbitrio per il punto O, ne siegue che, in ogni ellisse, esiste *un' infinità di sistemi di diametri conjugati.*

Conoscendo la direzione di uno di questi diametri, per esempio di LL′, per ottenere il suo conjugato, basta *delineare una corda qualunque* Mm *parallela ad* LL′, *e poi di unire il punto* O *con il punto medio di* Mm; *questa retta di congiunzione sarà il richiesto diametro.*

134. La relazione $aa' = -\frac{B^2}{A^2}$ prova ancora che il sistema *degli assi principali* è il solo sistema *dei diametri conjugati rettangolari*; poichè, ad oggetto che due diametri conjugati siano normali fra loro, bisogna (§ 125) che fra a ed a' esista la relazione $aa'+1=0$, o $aa'=-1$. Ora, questa equazione non può in generale accordarsi con $aa' = -\frac{B^2}{A^2}$ che soltanto finchè sia

$$-\frac{B^2}{A^2} = -1\,, \quad \text{cioè} \quad B = A.$$

E ciò non può aver luogo finchè la curva sia *un' ellisse propriamente detta* e non *un cerchio*.

Tuttavia dal supporre, nella relazione

$aa' = -\frac{B^2}{A^2}$; $a = o$, ne risulta $a' = \infty$; ciò che prova che se uno dei diametri vada a confondersi con l' asse delle x, l' altro si confonde con quello delle y, e allora i due diametri sono normali fra loro.

Siccome è questa la sola circostanza in cui le equazioni $aa' = -1$ ed $aa' = -\frac{B^2}{A^2}$ possano concordarsi fra loro, dovremo concluderne che gli assi formano *il solo sistema dei diametri conjugati perpendicolari fra loro.*

Nel caso particolare di $B = A$, la relazione $aa' = -1$ resta addempita, qualunque sia il sistema dei diametri conjugati; dunque, nel cerchio, *esiste un' infinità di sistemi di diametri conjugati perpendicolari fra loro*; ed in fatti, l' equazione del cerchio, riferita ad un qualunque sistema d'assi rettangolari condotti per il centro, ha sempre la forma $y^2 + x^2 = A^2$, essendo A il raggio.

135. Le conseguenze medesime hanno luogo per l' iperbole, e si dimostrerebbero del tutto in egual modo; ma questa curva ammette una particolar circostanza.

La relazione $aa' = \frac{B^2}{A^2}$, che esiste fra le direzioni dei due diametri conjugati, ci mostra che, se uno di essi LL' (fig. 85) incontra la curva, nel qual caso, chiamando a la tangente che gli corrisponde, sarà (§ 108) $a < \frac{B}{A}$, bisogna, per compenso, che sia $a' > \frac{B}{A}$; dunque il secondo diametro II' non incontra la curva. Perciò, in ciascun

sistema di diametri conjugati, l'uno è *trasverso* e l'altro *non trasverso*.

La stessa relazione $aa' = \frac{B^2}{A}$ prova ancora che i due angoli LOX, IOX sono *della medesima specie*, cioè, o tutti due acuti, o tutti due ottusi, giacchè le loro tangenti hanno lo stesso segno; perciò la differenza di questi due angoli non potrà mai essere *un'angolo retto*, se pure non fosse $a = o$, che cidarebbe $a' = \infty$; ed i due diametri si confonderebbero allora con i due assi principali.

L' ipotesi di $B = A$, ci dà $aa' = 1$, o $a' = \frac{1}{a}$ ciò che significa che i due angoli LOX, IOX sono complementi l' uno dell' altro, nell' *iperbole equilatera*, qualunque siasi il sistema dei diametri conjugati che si hanno in considerazione.

136. Riguardo alla parabola, se si riguardi un qualunque punto L della curva (fig. 86), chiamando y' la sua ordinata, e si stabilisca la relazione $y' = \frac{p}{a}$, cioè $a = \frac{p}{y'}$ (ved. § 122), la retta II', condotta per il punto L in modo che formi con l' asse delle x un' angolo che abbia per tangente a o $\frac{p}{y'}$; sarà appunto l'asse conjugato del diametro LL', cioè, della retta dalla quale tutte le corde parallele ad II' sono divise in due parti eguali. Questa retta è altronde *tangente* alla curva, per quanto si disse al n° 130.

Esiste dunque, nella parabola, *un infinità di sistemi d' assi conjugati*, *un solo* de' quali, quello cioè degli assi principali, è rettangolare, poichè

a, o $\frac{p}{y'}$ non può essere infinito se non che quando sia $y'=o$; nel qual caso il punto, che si ha in considerazione, si confonde con il punto A.

§ IV. *Identità delle curve di secondo grado con le sezioni del cono.*

137. Le curve di secondo grado assumono anche il nome di *sezioni coniche*, perchè si ottengono col tagliare un cono con un piano, e sono le sole che possono ottenersi.

Per dimostrarlo, proponiamoci di rintracciare l'equazione della curva che risulta dalla intersecazione di un cono retto (fig. 87) SADBE da un piano qualunque.

Siano SC l'asse del cono, CD il raggio della base, LL' la traccia segnata dal *piano secante* sul piano della base, ed OMO'M' la curva della intersecazione.

Caliamo dal punto C la CG normale ad LL'; poi, per SC e CG conduciamo un nuovo piano (che chiameremo *piano principale*, nome che dassi a qualunque piano che passa per l'asse del cono); l'intersecazione di questo piano con quello della curva è una retta O'OG perpendicolare ad LL' (t.° 2° § 80), ed è questa retta OO' che prenderemo per asse delle x; OY parallela ad LL', o perpendicolare ad OO', sarà l'asse delle y.

Per un punto qualunque P di OO' figuriamoci che passi un piano parallelo alla base, la di cui intersecazione con il cono è una circonferenza di cerchio. Questo piano taglia il piano principale a seconda di HI parallela ad AB, ed il piano secante a seconda della retta MPM' parallela ad LL'; ed è perciò perpendicolare insieme ad OO', ed HI (poichè LL' è anch'essa perpendicolare a GO e GC).

Frattanto facciamo

$$OP = x\ ,\ MP = y\ ,\ SO = a\ ,\ \text{ang. } SOO' = \alpha,$$

$$\text{ang. } OSO'\ ,\ \text{o } ASB = \beta\ ;\ \text{onde } ASC = \frac{1}{2}\beta.$$

$$\text{ed}\quad SAB = 100^\circ - \frac{1}{2}\beta.$$

Ciò posto, siccome MP è un' ordinata comune al cerchio ed alla curva, avremo (§ 136)

$$y^2 = IP \times PH \ .\ .\ .\ .\ (1),$$

ed il quesito si riduce a determinare IP, PH in funzione di x e delle quantità date.

Ora il triangolo OIP ci dà

$$IP : OP :: \text{sen } IOP : \text{sen } OIP,$$

o, attesochè $\quad \text{sen } IOP = \text{sen } SOO' = \text{sen } \alpha$,

$$\text{sen } OIP = \text{sen } SAB = \cos \frac{1}{2}\beta;$$

$IP : x :: \text{sen } \alpha : \cos\frac{1}{2}\beta$; dunque $IP = \dfrac{x \text{ sen } \alpha}{\cos \frac{1}{2}\beta}$.

Prima di determinare PH, rintracciamo il valore di OO'; dal triangolo SOO' abbiamo

$OO' : OS :: \text{sen} OSO' : \text{sen} OO'S$, o $OO' : a :: \text{sen}\beta : \text{sen}(\alpha+\beta)$;

onde $$OO' = \frac{a \text{ sen } \beta}{\text{sen } (\alpha+\beta)}.$$

Da ciò si deduce $PO' = OO' - OP = \dfrac{a \text{ sen } \beta}{(\text{sen}(\alpha+\beta)} - x.$

Adesso, dal triangolo PO'H, abbiamo

$$PH : PO' :: \text{sen } PO'H : \text{sen } PHO',$$

ovvero, $PH : \frac{a \text{ sen } \beta}{\text{sen}(\alpha+\beta)} - x :: \text{sen}(\alpha+\beta) : \cos\frac{1}{2}\beta$;

dunque $PH = \frac{a \text{ sen } \beta - x \text{ sen } (\alpha+\beta)}{\cos \frac{1}{2} \beta}$.

I valori di IP, PH, sostituiti nell'equazione (1) ci daranno per equazione della curva cercata

$$y^2 = \frac{x \text{ sen } \alpha}{\cos \frac{1}{2} \beta}\left(\frac{a \text{ sen } \beta - x \text{ sen } (\alpha+\beta)}{\cos \frac{1}{2} \beta}\right)$$

o $$y^2 = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta}[a \text{ sen } \beta . \, x - \text{sen}(\alpha+\beta) . \, x^2] \, . \, . \, (2).$$

138. Questa equazione essendo di secondo grado, ne siegue primieramente che *tutte le sezioni coniche siano curve di secondo grado.*

Di più, paragonandola con l'equazione

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

che (§ 116) rappresenta un'ellisse, una parabola, o un'iperbole, secondo che q è negativo, eguale a o, o positivo, si scorge che la sezione è *una ellisse*, ogni qualvolta il coefficiente

$-\frac{\text{sen} \alpha \text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta}$ sia negativo; una *parabola* se il coefficiente è nullo: un'*iperbole*, quando è positivo.

Ma osserviamo che, nella espressione di questo coefficiente, $\cos^2 \frac{1}{2} \beta$ è una quantità essenzialmente positiva; lo stesso deve dirsi di sen α, finchè si suppone α compreso fra 0° e 200° (Vedremo or ora l'inutilità di dargli valori maggiori). Perciò il coefficiente di x^2 dipende unicamente dal segno di sen $(\alpha+\beta)$.

Ciò posto, per porre il piano secante in tutte le situazioni addattate a darci tutte le sezioni coniche possibili, supporremo che questo piano giri attorno la retta OY (fig. 87) come cerniera, in guisa che la retta OO′, in prima coincidente con OS, formi poi tutti gli angoli possibili con la stessa OS.

In primo luogo, la retta OG coincidente con OS, ci dà, nella traccia del piano secante sulla base, una tangente KK′ a questa base; perciò la sezione è, in questo caso particolare, *una linea retta*.

In fatti sia $\alpha=o$, l'equazione si riduce ad $y^2=o$.

Supponiamo adesso che la retta GOO′ sia in tal posizione che incontri le due generatrici SA, SB, da una stessa parte del punto S; avremo visibilmente, in tal caso, $\alpha+\beta<200°$, onde sen $(\alpha+\beta)$ *positivo*, e —sen $(\alpha+\beta)$ *negativo*; dunque la curva è *un' ellisse*. In fatti, si ottiene allora una curva rientrante e chiusa.

In questa stessa circostanza, l'angolo α può eguagliare l'angolo SOR, cioè la retta OO′ può divenir parallela ad AB. Ma

$$\alpha=\text{SOR}=\text{SAB}=100°-\frac{1}{2}\beta\text{, ci dà}$$

$$\text{sen}\,\alpha=\cos\frac{1}{2}\beta\text{, e sen}\,(\alpha+\beta)=\text{sen}\,(100°+\frac{1}{2}\beta)=\cos\frac{1}{2}\beta;$$

dunque $$\frac{\text{sen}\,\alpha\ \text{sen}\,(\alpha+\beta)}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}=1.$$

L'equazione riceve allora la forma

$$y^2=2rx-x^2;$$

e l'ellisse degenera in una circonferenza di cerchio, come già sappiamo.

Quando la retta OG, continuando il suo giro, giunge in una posizione parallela alla generatrice SB (fig. 88) il piano secante diviene anch'esso paral-

lelo a questa generatrice, ed il triangolo SOO′ cessa di esistere, o il suo vertice O′ è situato in una distanza infinita; ed abbiamo, in questo caso,

$$\alpha+\beta=200^\circ, \text{ onde sen } (\alpha+\beta)=o.$$

Perciò, la curva è una *parabola*. Ed in fatti è una curva che si estende indefinitamente sotto la cerniera OY.

Ma quando la retta OG (fig. 89) si trova in una tal posizione che, essendo prolungata sopra della cerniera, incontri la generatrice SB nel suo prolungamento in O′, abbiamo allora evidentemente $\alpha+\beta>200^\circ$, onde sen $(\alpha+\beta)$ *negativo*, e $-$sen$(\alpha+\beta)$ *positivo*.

La curva è dunque, in tal caso, un *iperbole*. Si vede, infatti, che essa vien composta da due rami opposti che si estendono indefinitamente sopra le due *nappe* della superficie conica.

La retta OG, venendo a confondersi con OA fa che la traccia del piano secante torni tangente in A alla circonferenza della base, e la sezione si riduce di nuovo ad *una retta*.

In fatti $\alpha=200^\circ$ ci dà sen $\alpha=o$, onde $y^2=o$:

Quando l' angolo α diviene maggiore di 200°, la retta GO (fig. 87) prolungata riprende le posizioni che prima prese aveva; e si ricade sulle stesse curve. L'angolo α deve dunque restar compreso fra 0° e 200°, come si è stabilito in addietro.

Sia, come caso particolare, $a=o$; ciò che corrisponde alla supposizione che il piano secante passi per il punto S.

L' equazione generale diviene allora

$$y^2=-\frac{\text{sen } \alpha \text{ sen } (\alpha+\beta)}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}\,x^2, \ldots (3).$$

Potranno qui presentarsi tre casi:

O sarà (fig. 87)

$\alpha+\beta<200^\circ$, onde sen$(\alpha+\beta)>o$, e $-$sen $(\alpha+\beta)<o$,

o *negativo*. In questo caso è sensibile che l' equazione non potrebbe restare addempita che da $x = o$, $y = o$; perciò la curva si riduce ad un punto che, come si è veduto (§ 125) è una varietà dell' ellisse. Questa circostanza ha luogo, quando la retta GO prende una posizione SN interiore all' angolo A'SB, poichè abbiamo evidentemente

$$A'SN + ASB, \text{ o } \alpha+\beta < 200^\circ.$$

O sarà, $\alpha+\beta = 200^\circ$; onde sen $(\alpha+\beta) = o$ (fig. 88); e, l'equazione riducendosi ad $y^2 = o$, la sezione diviene ancora *una linea retta* che non è altra cosa che SB. E questa è una varietà della parabola.

Finalmente, può aversi $\alpha+\beta > 200^\circ$; onde —sen $(\alpha+\beta)$ *positivo*.

L' equazione (3) prende allora la forma

$$y = \pm x \sqrt{\left[\frac{\text{sen}\,\alpha\ \text{sen}\,(\alpha+\beta)}{\cos^2 \frac{1}{2}\beta}\right]},$$

e rappresenta *un sistema di due rette che si tagli ano*.

Questa circostanza ha luogo quando la retta OG passando per il punto S (fig. 89) incontra AB fra i punti A e B. È facile il vedere che il piano secante determina allora sopra la superficie del cono due generatrici SD, SE; e questo è un caso particolare dell' i perbole.

Da questa discussione possiamo concludere, che *il cono retto, colle sue intersecazioni effettuate da un piano, dà luogo a diverse curve di 2.° grado ed alle loro varietà*. Le dimensioni di queste curve dipendono da tre elementi principali cioè: l' angolo nel centro del cono, o β, che può essere così piccolo o così grande quanto si vuò; la distanza a dal vertice al punto della generatrice SA, per il quale si fa passare il piano, e questa distanza può cre-

scere da o fino all' infinito; infine, l' angolo α che deve restar compreso fra 0° e 200°.

N. B Il sistema di due rette parallele, che è, come si è veduto, una varietà della parabola, sembra essere un' eccezione alla precedente conclusione. Ma noi verificheremo ora che può egualmente ottenersi colla supposizione di $\beta = o$, supposizione che fa degenerare il cono in un cilindro.

139. *Equazione delle sezioni cilindriche.* Prima d' introdurre la condizione $\beta = o$ nella equazione (3), necessita il sottoporla ad una piccola modificazione.

Abbiamo trovato (§ 137 per la distanza OO′

$$OO' = \frac{a \text{ sen } \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)}.$$

Rappresentando questa distanza con $2A$, può darsi all' equazione (2) la forma seguente:

$$y^2 = \frac{\text{sen } \alpha \text{ sen } (\alpha + \beta)}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta} (2A\,x - x^2) \quad . \ . \ . \quad (4).$$

Benchè questa equazione sia in apparenza più semplice della (2), pure non è così facile il dedurne tutte le sezioni coniche, perchè A diviene infinito, nell' ipotesi della parabola.

Facciamo adesso $\beta = o$, e con ciò verrà ridotto il cono ad un cilindro (fig. 90).

Risulta da ciò sen $(\alpha + \beta) = $ sen α, e cos $\frac{1}{2}\beta = 1$.

Per altra parte, il triangolo rettangolo OO′K ci dà

$$OO' \text{ o } 2A = \frac{O'K}{\text{sen } O'OK} = \frac{2r}{\text{sen } \alpha},$$

(rappresentando r il raggio della base), dunque l' equazione (4) si riduce ad

$$y^2 = 2r \text{ sen } \alpha x - x^2 \text{ sen}^2 \alpha \quad . \ . \ . \ . \quad (5)$$

Tal' è l' equazione generale della *intersecazione di un cilindro con un piano.*

Può ottenersi direttamente dalla figura attuale.

Abbiamo prima $\overline{MP}^2$ o $y^2 = PI \times PH$;

ma i triangoli OIP O'PH danno $IP = x \text{ sen } \alpha$,

$$PH = PO' \text{ sen } \alpha = (2A - x) \text{ sen } \alpha;$$

o, attesochè $2A = \frac{2r}{\text{sen } \alpha}$,

$$PH = \left(\frac{2r}{\text{sen } \alpha} - x\right) \text{ sen } \alpha = 2r - x \text{ sen } \alpha.$$

Dunque $y^2 = x \text{sen}\alpha (2r - x \text{sen}\alpha) = 2r \text{sen}\alpha . x - x^2 \text{sen}^2\alpha$.

Siccome nella (5), il coefficiente di x^2 è *negativo* (fuorchè per $\alpha = o$, caso che andiamo a discutere), ne siegue (§ 137) che *ogni sezione cilindrica è un' ellisse*; e dal confronto di quest' equazione con quella dell' ellisse riferita al suo vertice, $y^2 = \frac{B^2}{A^2}(2Ax - x^2)$, si riconosce che il primo asse 2A ha per valore $\frac{2r}{\text{sen } \alpha}$.

Per ottenere il secondo, basta porre

$\frac{B^2}{A^2} = \text{sen}^2 \alpha$; onde $B^2 = A^2 \text{sen}^2 \alpha = r^2$; ciò che prova che il secondo asse è *costante ed eguale al diametro della base.*

Perciò, le sezioni cilindriche sono *ellissi che hanno un' asse comune.*

140. Occupiamoci ora nel dedurre dalla (5), il caso particolare del sistema di due paralelle.

Dal fare in questa equazione $\alpha = o$, ne risulta $y^2 = o$, che altro non è che l' equazione di *una sola retta*; cioè quella della retta AA'. Finchè si sup-

porrà che il piano secante giri attorno al punto O della generatrice, si vede che, nella ipotesi di $\alpha=o$, non potrà mai trovarsi che $y^2=o$; ma, col far girare il piano attorno di un'altro punto di OO', il piano ci darà evidentemente due generatrici della superficie, quando si farà $\alpha=o$.

Prendiamo, per esempio, il punto G per centro di rotazione, e perciò, per origine delle coordinate.

Siano $\quad CG=b,\ CA=r,$ onde

$$AG=b-r,\ OG=\frac{AG}{\text{sen } GOA}=\frac{b-r}{\text{sen }\alpha}$$

perremo nella (5), $x=x-\frac{b-r}{\text{sen }\alpha}$; e diverrà

$$y^2=2r\text{sen}\alpha\left(x-\frac{b-r}{\text{sen }\alpha}\right)-\left(x-\frac{b-r}{\text{sen }\alpha}\right)^2\text{sen}^2\alpha; \quad o$$

$$y^2=2r\text{sen }\alpha.x-2r(b-r)-x^2\text{sen}^2\alpha+2(b-r)\text{sen }\alpha.\,x-(b-r)^2$$

o, semplificando,

$$y^2=-x^2\,\text{sen}^2\alpha+2b\,\text{sen }\alpha\, x+r^2-b^2.$$

Tal' è l' equazione generale delle sezioni cilindriche riferite al punto G, come origine.

Sia ora $\alpha=o$, onde sen $\alpha=o$, l' equazione si riduce a

$$y^2=r^2-b^2, \text{ cioè } y=\pm\sqrt{(r^2-b^2)}.$$

Questo risultato esprime evidentemente la posizione di un sistema di due rette parallele (fig. 91); ma affinchè un tal sistema sia reale, bisogna che sia $b<r$; cioè che la distanza CG sia minore di CA.

Dal supporre $b=o$, l'equazione diviene $y=\pm r$; e questo è il sistema delle due generatrici il di cui piano passa per l' asse del cilindro. Nel caso ge-

nerale, abbiamo due qualunque generatrici, come, EE′, FF′.

Della sezione anti-parallela alla base, nel cono obliquo.

141. Il cono obliquo, a base circolare, dà egualmente luogo a tre curve di secondo grado; ma ha inoltre una proprietà che non appartiene al cono retto; cioè che il piano secante vi produce delle circonferenze di cerchio, sotto due differenti inclinazioni rapporto alla base.

Incominciamo dal rintracciare l'equazione generale della intersecazione.

Ripeteremo sul cono obliquo SADBE (fig. 92) la stessa costruzione fatta sul cono retto (§ 137); soltanto osserveremo che, siccome l'asse del cono, SC, non è più perpendicolare alla base, pure la traccia LL′ del piano secante nel piano della base, è certamente perpendicolare a GC per costruzione, ma non lo è di necessità a GO′; d'onde siegue che la retta MM′, intersecazione del piano secante con il piano parallelo alla base, condotto dal punto P, sia *perpendicolare* ad IH ma *obbliqua* ad OO′.

Premessa questa osservazione, poichè MP è sempre perpendicolare ad IH, sarà $y^2 = IP \times PH$.

Ora, troveremo, come di sopra, $IP = \frac{x \text{ sen } \alpha}{\text{sen } A}$,

$$OO' = \frac{a \text{ sen } \beta}{\text{sen}(\alpha+\beta)}, \text{ onde}$$

$$PO' = OO' - OP = \frac{a \text{ sen } \beta}{\text{sen } (\alpha+\beta)} - x, \text{ e perciò}$$

$$PH = \frac{PO' \text{sen}(\alpha+\beta)}{\text{sen PHO}'} = \frac{a \text{ sen } \beta - x \text{ sen } (\alpha+\beta)}{\text{sen B}}$$

Gli Angoli A, B formati nella base del cono; sono legati con l'ang. β dalla relazione $A+B+\beta=200^{\circ}$; onde sen $B=$ sen $(A+\beta)$.

Perciò, il valore di y^2 diviene, a simplificazione effettuata,

$$y^2=\frac{\text{sen}\,\alpha\ \text{sen}\,(\alpha+\beta)}{\text{sen}\,A\ \text{sen}(\alpha+\beta)}\times\left(\frac{a\ \text{sen}\,\beta}{\text{sen}(\alpha+\beta)}x-x^2\right).$$

Questa equazione rappresenta un'ellisse, una parabola, o un'iperbole, riferita ad un sistema di *assi obliqui*, secondo che sen $(\alpha+\beta)$ è positivo, o eguale a o, o negativo; cioè secondo che si ha

$$\alpha+\beta<200^{\circ}\,,\ =200^{\circ}\,,\ >200^{\circ}.$$

(Vedasi quanto si disse n.[i] 128 .... 130, supponendo tuttavia l'ellisse e l'iperbole riferite ad una delle estremità di uno dei diametri conjugati).

Conviene osservare che la curva d'intersecazione può essere un cerchio in due maniere differenti.

Per dimostrarlo, diamo all'equazione la forma

$$y^2+\frac{\text{sen}\,\alpha\ \text{sen}\,(\alpha+\beta)}{\text{sen}A\,\text{sen}\,(A+\beta)}.\ x^2=\frac{a\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta}{\text{sen}A\,\text{sen}(A+\beta)}.\ x.$$

Ciò posto, sia in prima $\alpha=A$, o il piano secante parallelo alla base; ne risulta

$$\text{sen}\ \alpha=\text{sen}\ A\,,\ \text{sen}\,(\alpha+\beta)=\text{sen}\,(A+\beta)\,;\ \text{onde}$$

$$\frac{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,(\alpha+\beta)}{\text{sen}\,A\,\text{sen}\,(A+\beta)}=1.$$

Sia ancora $\alpha=\beta=200^{\circ}-(A+\beta)$; ne risulta

$$\text{sen}\,\alpha=\text{sen}\,(A+\beta)\,,\quad \text{e}$$

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta)=\text{sen}\,(200^{\circ}-A-\beta+\ )=\text{sen}\,A;$$

$$\text{d'onde}\quad \frac{\text{sen}\,\alpha\ \text{sen}\,(\alpha+\beta)}{\text{sen}\,(A+\beta)\,\text{sen}\,A}=1.$$

In queste due ipotesi: $\alpha = A$; $\alpha = B$, l'equazione prende la forma $y^2 + x^2 = Kx$, che altro non è che l'equazione del cerchio, quando l'origine è situata all'estremità di un diametro preso per asse delle x.

Per verità, affinchè quest'equazione rappresentasse realmente una circonferenza di cerchio, bisognerebbe che l'ordinata PM fosse nel tempo stesso perpendicolare ad OO' ed IH; ma egli è facile di porre il piano secante in una tal situazione che questa condizione venga addempita.

In fatti, sia ST (fig. 93) la normale calata dal vertice S sulla base. Uniamo il centro C della base con il punto T, e poi in un qualunque punto G di CT, conduciamo LL' perpendicolare a questa retta, e guidiamo un qualunque piano secante per LL'; e con ciò verremo a soddisfare alla condizione di cui parliamo. Se dunque si supponga in oltre, il piano diretto in guisa che l'ang. SOG sia eguale all'ang. B, l'equazione $y^2 + x^2 = Kx$ sarà quella di una curva riferita ad assi rettangolari, e perciò rappresenterà una circonferenza di cerchio.

La sezione OMO'M' vien chiamata, per convenzione, *sezione anti-parallela alla base*.

N. B. Si conosce facilmente che le ipotesi $\alpha = A$ $\alpha = B$, sono le sole in cui il coefficiente

$$\frac{\text{sen } \alpha \text{ sen } (\alpha + \beta)}{\text{sen A sen } (A + \beta)}$$ possa essere eguale ad 1.

In fatti, poniamo $$\frac{\text{sen } \alpha \text{ sen } (\alpha + \beta)}{\text{sen A sen } (A + \beta)} = 1.$$

d'onde $\text{sen } \alpha \text{ sen } (\alpha + \beta) = \text{sen A sen } (A + \beta)$;

ma si è trovato (t.° 3.° § 112)

$$\cos (a - b) - \cos (a + b) = 2 \text{ sen } a \text{ sen } b;$$

e se, in questa formola, si faccia

$a=\alpha+\beta$; $b=\alpha$; d'onde $a+b=2a+\beta$; $a-b=\beta$,

se ne deduce $2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}(\alpha+\beta)=\cos\beta-\cos(2\alpha+\beta)$;

e si troverebbe ancora

$$2\,\text{sen}\,A\,\text{sen}\,(A+\beta)=\cos\beta-\cos\,(2A+\beta)\,;$$

ciò che ci dà l' equazione di condizione

$$\cos\,(2\alpha+\beta)=\cos\,(2A+\beta).$$

Ora, questa equazione non può venire addempita, a meno che non sia

1.° $2\alpha+\beta=2A+\beta$; onde $\alpha=A$,

2.° $2\alpha+\beta=400°-(2A+\beta)$; ed $\alpha=200°-(A+\beta)=B$.

Dunque etc.

Sarà nel 6.° Capitolo, che vedremo questa proprietà del cono obliquo non essere che un caso particolare di quella che compete alle superfici di secondo grado.

CAPITOLO III.

Proprietà principali delle sezioni coniche.

142. *Osservazione preliminare.* Abbiam veduto (§ 105) che, per passare dall' equazione dell' ellisse a quella dell' iperbole, basta cangiare B^2 in $-B^2$; risulta da ciò la necessità che queste due curve debbano offrire una grandissima analogia nelle loro proprietà e sopra tutto nelle dimostrazioni di queste proprietà. Potremo dunque evitare molte ripetizioni inutili, se, dopo aver riconosciuta una qualunque proprietà nell' ellisse, che deve riguardarsi come la curva la più semplice, e quella il di cui uso è più abituale, ci limiteremo ad accennare la proprietà analoga nell' iperbole, avendo bensì premura d' insi-

stere su quelle che potrebbero offrire qualche differenza sia nella natura, sia nelle loro dimostrazioni.

In quanto alla parabola, che non ha centro, e i di cui assi principali o conjugati sono infiniti, siccome le sue proprietà non possono avere che una remotissima analogia con quelle delle altre due curve, perciò presenteremo di questa curva una teoria affatto distinta.

DELL' ELLISSE E DELL' IPERBOLE.

§ I.° *Proprietà di queste Curve riferite ai loro assi principali.*

143. *Caratteri analitici* dei punti presi sopra la curva, è dentro o fuori della curva. L' equazione dell' ellisse riferita al suo centro ed ai suoi assi principali, essendo (fig. 94)

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2,$$

ci dà, primieramente, per ognuno de' suoi punti M, la relazione

$$A^2y^2+B^2x^2-A^2B^2=o.$$

Ora, considerando un punto N *interiore* a questa curva, siccome l'ordinata NP di questo punto è minore dell'ordinata MP corrispondente alla stessa ascissa OP, ne siegue che $A^2.\overline{NP}^2$ sia minore di $A^2.\overline{MP}^2$; perciò avremo, per il punto N,

$$A^2y^2+B^2x^2-A^2B^2<o.$$

Per un punto N' *esteriore*, l'ordinata N'P è maggiore di MP, ed abbiamo necessariamente

$$A^2y^2+B^2x^2-A^2B^2>o.$$

N. B. Se il punto esteriore avesse la posizione N'', per la quale non esiste ordinata della curva corri-

spondente, siccome l' ascissa di questo punto sarebbe già maggiore di OB, o A, ne risulterebbe $B^2x^2 > A^2B^2$; e con più ragione

$$A^2y^2 + B^2x^2 - A^2B^2 > o.$$

Si dimostrarebbe similmente nell' iperbole

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2,$$

che è il carattere dei punti presi

sulla curva . . . $A^2y^2 - B^2x^2 + A^2B^2 = o$,

dentro . . . . . $A^2y^2 - B^2x^2 + A^2B^2 < o$,

fuori . . . . . . $A^2y^2 - B^2x^2 + A^2B^2 > o$.

Le due ineguaglianze sono evidenti riguardo a punti tali come N ed N', per i quali abbiamo

$$NP < MP, \text{ ed } N'P > MP \text{ (fig. 95)}.$$

In quanto al punto N'', la di cui ordinata cade fra i punti A e B, siccome è $OQ'' < OB$, o di A, ne risulta $A^2B^2 - B^2x^2 > o$; onde, con maggior ragione, sarà $A^2y^2 - B^2x^2 + A^2B^2 > o$.

144. Le definizioni dell' ellisse e dell' iperbole ci somministrano ancora per i punti presi sulla curva, dentro, o fuori, un carattere interessante a conoscersi.

Per ciascun punto M dell' ellisse, si sà che la *somma delle distanze* F'M+FM (fig. 94), è eguale a 2A.

Per un punto R interiore, siccome abbiamo

$F'R + FR < F'M + MF$, ne risulta $F'R + RF < 2A$.

Per un punto R' esteriore, abbiamo, al contrario,

$F'R + R'F > F'M + MF$; onde $F'R' + R'F > 4A$.

Consideriamo adesso l' iperbole. Per un punto qualunque M della curva, *la differenza delle distanze* F'M — MF, *è eguale* a 2A.

Sia un punto interiore R (fig. 95); unendo questo punto coi punti F' ed F, avremo

$$F'R = F'M + MR, \text{ ed } RF < MF + MR;$$

d' onde si deduce $F'R - RF > F'M + MR - MF - MR$,

o $$F'R - RF > F'M - MF, > 2A.$$

Ma per un punto esteriore F', dandoci la figura

$$F'R' = F'M - MR', \text{ ed } FR' > MF - MR',$$

ne risulta

$$F'R' - FR' < F'M - MR' - MF + MR' < 2A.$$

145. Dall' equazione dell' ellisse, si deduce

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2), \text{ ovvero},$$

$$\frac{y^2}{(A+x)(A-x)} = \frac{B^2}{A^2}.$$

Siano ora M un punto qualunque della curva (fig. 94), x ed y le coordinate di questo punto, è sensibile che $A+x$ ed $A-x$ rappresentano le distanze AP, BP dei vertici della curva dal piede dell' ordinata MP; perciò la addotta equazione diviene

$$\frac{\overline{MP}^2}{AP \times PB} = \frac{B^2}{A^2}, \text{ o } \overline{MP}^2 : AP \times BP :: B^2 : A^2,$$

ciò che prova che *il quadrato di qualunque ordinata sta al prodotto di due distanze dal piede dell' ordinata ai vertici della curva, in un rapporto costante*; o, con altra espressione, *i quadrati delle ordinate sono respettivamente proporzionali ai rettangoli delle distanze dai piedi di queste ordinate ai vertici della curva*.

Che se si supponga $B = A$, si ridurrà la relazione ad $y^2 = A^2 - x^2$, o $y^2 = (A+x)(A-x)$, cioè: *il quadrato dell' ordinata al diametro di un cerchio, è eguale al rettangolo dei segmenti di*

questo diametro formati dall' ordinata; ovvero *l'ordinata è media proporzionale fra i segmenti del diametro*; proprietà già dimostrata in Geometria (t.° 2.° § 53)

Similmente si ritrae dall' iperbole

$$\frac{y^2}{(x+A)(x-A)} = \frac{B^2}{A^2}.$$

ma $\quad x+A = AP, \ x-A = BP$ (fig. 95)

dunque $\quad \frac{\overline{MP}^2}{AP \times BP} = \frac{B^2}{A^2}.$

Perciò, l'addotta proprietà ha luogo egualmente per l' iperbole. Colla sola differenza che, nell' ellisse, il piede dell' ordinata è situato fra i punti A e B, mentre che, nell' iperbole, il piede dell' ordinata si trova sul prolungamento di AB, sia a destra, sia a sinistra.

Nell' ipotesi di B=A, o dell' iperbole equilatera, si riduce la relazione ad $y^2 = (x+A)(x-A)$; il che significa: che *il quadrato dell' ordinata eguaglia il rettangolo dei segmenti del primo asse compresi fra i vertici della curva ed il piede dell' ordinata*; proprietà analoga a quella del cerchio (t.° 2.° § 53).

Del resto, la precedente proprietà non è che un caso particolare di un altra più generale che è propria delle curve di secondo grado riferite a qualunque asse, e che verrà dimostrata nel Capitolo. 4.°

146. Descriviamo sull' asse maggiore AB (fig. 96) di un' ellisse, come diametro, una circonferenza di cerchio. Sarà la sua equazione $y^2 = A^2 - x^2$; essendo altronde quella dell' ellisse $y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2)$;

Siegue da ciò che, indicando con y l' ordinata di un qualunque punto dell' ellisse, e con Y l' ordina-

ta del cerchio, corrispondente alla stessa ascissa x, dovrà aversi la relazione

$$\frac{y^2}{Y^2}=\frac{B^2}{A^2}\text{; onde }\frac{y}{Y}=\frac{B}{A}\text{ o }y=\frac{B}{A}.\ Y;$$

cioè: *l'ordinata dell' ellisse sta all' ordinata del cerchio descritto sul suo asse maggiore, nel rapporto del minor' asse al maggior asse.*

Risulta da ciò un mezzo semplicissimo per descrivere l' ellisse con punti, quando siano cogniti i due assi.

Sopra i due assi AB, CD *si descrivano due circonferenze di cerchio; innalzata, in un qualunque punto* P *dell' asse maggiore, una normale* PM, *si conduca il raggio* OM, *e dal punto* L *ove questo raggio taglia la circonferenza minore, si conduca* LN *parallela ad* AB; il punto N, ove questa parallela incontra PM, appartiene all' ellisse.

In fatti, abbiamo, dalla costruzione,

$$OM : OL :: PM : PN \text{ o } A : B :: Y : PN;$$

onde
$$PN=\frac{B}{A}.\ Y=y.$$

Prolungando poi PM fino alla lunghezza Pn=PM′ otterremo n per un nuovo punto della curva; i punti n, ed n'' simetrici dei punti N ed n possono in seguito facilmente determinarsi.

Ecco ancora un' altro mezzo per costruire l' ellisse con punti, fondato sulla medesima proprietà, ed impiegato spesso con più opportunità.

Siano AB, CD (fig. 97) i due assi della curva. Dopo di avere indicato sopra CD un punto K tale che risulti OK = A—B, *si prenda un qualunque punto* I, *situato fra* O *e* K, *poi da questo punto* I, *come centro, con un raggio eguale ad* A—B, *o* OK, *si descriva un' arco di cerchio che tagli* AB *in* L *ed* L′; *condotte le* IL, IL′, *e prese*

sopra queste due rette $IM = IM' = A$; i punti M, M', apparteranno alla curva.

Infatti, guidando IH parallela ad AB, ed MQ, perpendicolare ad IH, i due triangoli simili IQM, LPM, ci danno

$$MI : ML :: MQ : MP;$$

d'onde $$MP = \frac{ML}{MI} . MQ = \frac{B}{A} . MQ;$$

ma, ponendo $OP = IQ = x$, abbiamo

$$MQ = \sqrt{(\overline{MI}^2 - \overline{IQ}^2)} = \sqrt{(A^2 - x^2)};$$

dunque $$MP = \frac{B}{A}\sqrt{(A^2 - x^2)};$$

e si vede con ciò che MP è l'ordinata dell'ellisse che corrisponde all'ascissa OP.

Prendendo poi $OI' = OI$, verrebbero a determinarsi, sotto AB, due altri punti m, m' simetrici dei punti M, M' rapporto ad AB.

Si vede altronde perchè il punto I debba esser posto fra O e K.

Non possiamo però per l'iperbole prevalerci di mezzi di costruzione analoghi a questi; perchè la sua equazione essendo $y^2 = \frac{B^2}{A^2}(x^2 - A^2)$, non può paragonarsi con l'altra $y^2 = x^2 - A^2$, cioè con quella di un'iperbole equilatera descritta sopra l'asse trasverso della prima iperbole. Converrebbe dunque sapere già costruire un'iperbole equilatera, per dedurne poi la costruzione di una qualunque iperbole.

147. *Misura della superficie dell'ellisse.* Il rapporto costante $\frac{A}{B}$ che esiste fra l'ordinata dell'ellisse e quella del cerchio descritto sul suo asse maggiore, ci conduce semplicissimamente all'espressione della superficie intera dell'ellisse.

In fatti, imaginiamoci iscritto al cerchio un qualunque poligono di cui MM′ (fig. 96) sia uno de' lati. Dai vertici M, M′, . . . di questo poligono, si calino le normali sull' asse maggiore, unendo con corde i punti N, N′, . . . ove queste normali incontrano l' ellisse; otterremo così un poligono iscrit to a questa curva, di cui NN′ sarà uno dei lati.

Ciò posto, siano Y, Y′ le ordinate dei due punti M, M′, ed y, y', le ordinate dei punti N, N′, corrispondenti alle stesse ascisse x, x'; i trapezj MM′ PP′, NN′ PP′, ci danno

$$\mathrm{MM'PP'} = \frac{Y+Y'}{2}(x-x'), \mathrm{NN'PP'} = \frac{y+y'}{2}(x-x')$$

d' onde si deduce $\dfrac{\mathrm{NN'PP'}}{\mathrm{MM'PP'}} = \dfrac{y+y'}{Y+Y'}$.

Ma, si è veduto (§ 146)

$$y = \frac{B}{A}.\, Y,\ y' = \frac{B}{A}.\, Y';\ \text{onde}\ \frac{y+y'}{Y+Y'} = \frac{B}{A};$$

dunque $\dfrac{\mathrm{NN'PP'}}{\mathrm{MM'PP'}} = \dfrac{B}{A}$.

In simil guisa si verrebbe a conoscere, che ciascuno dei trapezj, dai quali è costruito il poligono iscritto all' ellisse, sta al trapezio corrispondente del poligono iscritto al cerchio, come B: A; d' onde può concludersi che la somma di tutti i primi trapezj, cioè il poligono iscritto all' ellisse, stà al secondo poligono, nel medesimo rapporto; cosichè, essendo p e P le superfici di questi due poligoni, si ha $\dfrac{p}{P} = \dfrac{B}{A}$.

Questa relazione, siccome è vera, qualunque sia il numero dei lati dei due poligoni, esisterà ancora per i *lor limiti*, che altro non sono che la superficie dell' ellisse e quella del cerchio. Dunque, rappresentando con s ed S queste due superfici, avremo necessariamente

$$\frac{s}{S} = \frac{B}{A}, \quad o \quad s = \frac{B}{A} \cdot S.$$

Ma sappiamo che (t° 2° § 74), rappresentando π il rapporto della circonferenza al diametro, o la superficie del cerchio che ha 1 per raggio, πA^2 esprime quella di un cerchio che ha per raggio A; perciò

$\pi . A^2 . \frac{B}{A}$, o $\pi . A . B$, è l'espressione dell' intera superficie dell' ellisse.

Per l'iperbole, si otterrebbe egualmente $s = \frac{B}{A} . S$; rappresentando s l'area compresa fra la curva ed una qualunque corda parallela al secondo asse, S l' area corrispondente di una iperbole equilatera descritta sul primo asse. Ma questa relazione niente può farci conoscere sulla quadratura dell' iperbole, poichè converrebbe conoscer prima quella di un' iperbole equilatera.

Proprietà delle corde supplementarie, e delle loro relazioni con i diametri conjugati.

148. Se dalle estremità A e B (fig. 100) dell' asse maggiore si conducano due rette ad un qualunque punto M della curva, queste rette di congiunzione sono quelle che si denominano *corde supplementarie*. Esse fanno con il primo asse due angoli che hanno fra loro una relazione rimarchevole.

Primieramente, la retta BM, passando per il punto B le di cui coordinate sono $y = o$, $x = A$, ha per equazioni

$$y = a\,(x - A);$$

e la retta AM, passando per il punto ($y = o$, $x = -A$), ha l'altra

$$y = a'\,(x + A).$$

Ciò posto, indichiamo con x', y', le coordinate del punto M; dovendo queste verificare le precedenti equazioni avremo

$$\left.\begin{array}{l} y' = a\ (x' - A) \\ y' = a'\ (x' + A) \end{array}\right\} \text{; onde } a = \frac{y'}{x' - A}\ ,\ a' = \frac{y'}{x' + A}\ ;$$

e perciò, $$aa' = \frac{y'^2}{x'^2 - A^2}\ ;$$

ma poichè anche il punto (x', y') si trova sulla curva

avremo $A^2y'^2 + B^2x'^2 = A^2B^2$; cioè $\frac{y'^2}{x'^2 - A^2} = -\frac{B^2}{A^2}$ e

dunque finalmente $$aa' = -\frac{B^2}{A^2}\ \ldots\ldots\ldots\ (1).$$

Relazione che, nel caso di $B = A$, diviene $aa' = -1$; ciò che prova che, nel cerchio, la *corde supplimentarie sono ad angolo retto.*

La medesima relazione (1) esiste ancora fra gli angoli di due corde supplimentarie che partono dalle estremità di un qualunque diametro EE'.

In fatti, siano x'', y'', le coordinate del punto E; quelle del punto E' saranno (§ 100) $-x''$, $-y''$; e le equazioni di due rette condotte dai punti E, E', ad un qualunque punto M' della curva avranno la forma

$$y - y'' = a\,(x - x'')\ ,$$

$$y + y'' = a'(x + x'').$$

E siccome il punto M' o (x', y') si trova nel tempo stesso sopra queste due rette, avremo le due relazioni

$$\left.\begin{array}{l} y' - y'' = a(x' - x''), \\ y' + y'' = a'(x' + x'') \end{array}\right\} \text{onde } aa' = \frac{y'^2 - y''^2}{x'^2 - x''^2}.$$

Ma, i punti M', E, E' trovandosi pur anche sulla curva, avremo egualmente

$$\left.\begin{array}{l} A^2y'^2+B^2x'^2=A^2B^2, \\ A^2y''^2+B^2x''^2=A^2B^2, \end{array}\right\} \text{onde} \frac{y'^2-y''^2}{x'^2-x''^2}=-\frac{B^2}{A^2}$$

e perciò, $$aa'=-\frac{B^2}{A^2}$$

Riprendiamo adesso le due corde supplimentarie AM, BM, e proponiamoci di determinare l'angolo che esse fanno fra loro; basta, a tale oggetto, che si calcoli l'espressione $\frac{a-a'}{1+aa'}$; rappresentando a la tangente di MBX, ed a' quella di MAX.

Si è trovato di sopra, $a=\frac{y'}{x'-A}$, $a'=\frac{y'}{x'+A}$;

dunque $$\frac{a-a'}{1+aa'}=\frac{\frac{y'}{x'-A}-\frac{y'}{x'+A}}{1+\frac{y'^2}{x'^2-A^2}}=\frac{2Ay'}{x'^2-A^2+y'^2}.$$

Ma l'equazione $A^2y'^2+B^2x'^2=A^2B^2$,

ci dà $$x'^2-A^2=-\frac{A^2y'^2}{B^2}$$; perciò otterremo

$$\frac{a-a'}{1+aa'}=\frac{2Ay'}{-\frac{A^2y'^2}{B^2}+y'^2}=\frac{-2AB^2}{(A^2-B^2)y'} \quad \dots (2).$$

Dalla semplice considerazione di questo risultato veniamo prima accertati che, avendo riguardo ad un qualunque punto M della curva situato sopra AB, nel qual caso y' è positivo, la tangente dell'angolo AMB è *negativo*; dunque quest'angolo è necessariamente *ottuso*. E ciò dev'esser così, atte-

sochè tutti i punti dell' ellisse sono interiori alla semi-circonferenza descritta sopra AB come diametro.

Si vede, inoltre, che più è grande y', e più il valore aritmetico dell' espressione (2) divien piccolo, ed, in conseguenza, più l' angolo è considerabile (poichè un' angolo ottuso è altrettanto più grande, quanto la sua tangente è aritmeticamente più piccola.

Dal *massimo* di quest' angolo, che corrisponde a quello di y', cioè ad $y'=B$, si ottiene per valore corrispondente della espressione (2),

$$\frac{-2AB^2}{(A^2-B^2)B}, \quad o \quad \frac{-2AB}{A^2-B^2}.$$

I valori di a, a' divengono altronde, in tale ipoteti,

$$a=-\frac{B}{A},\ a'=\frac{B}{A},\ \text{poichè } y'=B,\ \text{dà } x'=o.$$

Si raccoglie da tutto ciò che *le corde supplimentarie*, *condotte dalle estremità dell' asse maggiore, formano nel punto* C *il maggior angolo possibile.*

149. Nell' iperbole, si troverebbe, mediante la relazione fra gli angoli delle corde supplimentarie, $aa'=\frac{B^2}{A^2}$; e per l' espressione dell' angolo che esse formano fra loro, $\frac{2AB^2}{(A^2+B^2)y^2}$ (fig. 99).

Quest' ultimo risultato dimostra che l' angolo AMB o AM'B delle due corde supplimentarie è sempra *acuto*, e che diminuisce di più in più a misura che y aumenta. Quando in fine si suppone $y=\infty$ *a* quest' angolo si *annulla*.

Serve anche ciò a provare la relazione $aa' = \frac{B^2}{A^2}$.

Infatti, il prodotto delle due tangenti a ed a', essendo positivo, prova che queste tangenti hanno lo stesso segno; dunque gli angoli corrispondenti MBX, MAX, o M'BX, M'AX, sono ambedue acuti, o ambedue ottusi; la differenza di questi angoli, che altro non è che AMB, o AM'B, è allora necessariamente un' angolo acuto.

Sia $a = \frac{B}{A}$; ne risulterà anche $a' = \frac{B}{A}$; le due corde supplimentarie divenendo insieme parallele all' assintoto OL, fanno fra loro un' angolo *nullo*.

150. *Conseguenza* sopra i diametri conjugati. Se dal centro di un' ellisse, si guidino due diametri GG', HH', (fig. 100), respettivamente paralleli alle corde supplimentarie AM, BM, avremo fra gli angoli, che formano questi due diametri con l'asse maggiore, la medesima relazione $aa' = -\frac{B^2}{A^2}$.

Ora, questa relazione è precisamente quella (§ 133) che caratterizza due diametri conjugati.

Dunque, *due diametri*, *respettivamente paralleli alle corde supplimentarie d' un' ellisse*, *formano sempre un sistema di diametri conjugati*.

Dopo ciò, conoscendo un qualunque diametro GG', per ottenere il suo conjugato, basta *condurre dal punto* A *una corda* AM *parallela a* GG', *tirare la seconda corda supplimentaria* MB, *e poi delineare il diametro* HH' *parallelo ad* MB.

La conseguenza medesima si applica all' iperbole per la quale la relazione delle corde supplimentarie e quella dei due diametri conjugati, è egualmente

$aa'=\frac{B^2}{A^2}$. Pure, sarà opportuno l' osservare che, più il punto, da cui si conducono le due corde supplimentarie, si allontana dal vertice, e più i due diametri conjugati, uno de' quali trovasi sopra e l'altro sotto l' assintoto (§ 135), si approssimano l' uno all' altro; e allorquando il punto è situato all' infinito, cioè, quando le corde supplimentarie sono (§ 149) parallele all' assintoto, *i due diametri conjugati si confondono in uno.*

151. *Osservazione.* Nell' ellisse, siccome si è veduto (§ 148) che l'angolo AMB (fig. 100) delle due corde supplimentarie è sempre ottuso, e che quest' angolo perviene al suo massimo nel punto C, ne risulta che l' angolo GOH, formato dalle parti di due diametri conjugati poste dalla stessa parte rapporto all' asse maggiore, sia necessariamente *ottuso*, e che i due diametri conjugati II', LL', paralleli alle corde AC, BC, formino fra loro il più grand' asse possibile.

Per qualunque sistema GG', HH', avendo l'ang. GOH per supplemento GOH', è sensibile che più è grande il primo angolo è più è piccolo il secondo; cosichè dall' essere l' angolo IOL un *massimo* fra gli angoli ottusi formati da due diametri conjugati, ne siegue che l' angolo IOL, sia un *minimo* fra gli angoli acuti formati da questi stessi diametri.

D' onde può finalmente concludersi che l'*angolo di due diametri conjugati di un' ellisse qualunque è sempre compreso fra i due limiti* IOL' o BCA' *ed* IOL *o* BCA.

Vedremo in appresso le altre conseguenze che risultano da queste proprietà.

152. Proponiamoci adesso di *condurre una tangente all' ellisse o all' iperbole* da un punto dato sul piano della curva.

Per risolvere questo quesito, ci prevarremo di un metodo analogo a quello del n.° 66. Siano x', y' le coordinate del punto dato; essendo l' equazione dell' ellisse $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B$ . . . . (1) quella della retta cercata avrà la forma

$$y - y' = a(x - x') \; . \; . \; . \; . \; (2),$$

e si tratterà di determinare a in guisa che la retta considerata prima come secante, divenga in seguito tangente.

Dalla equazione (2) si deduce $y = ax + y' - ax'$ onde, sostituendo nella (1) ed ordinando rapporto ad x,

$$(A^2a^2+B^2)x^2+2A^2a(y-ax')x+A^2(y'-ax')^2-A^2B^2=o$$

La risoluzione di questa equazione ci darebbe due valori di x, che altro non sarebbero che le ascisse dei punti d' intersecazione di una curva con una retta corrispondente al valore particolare che si sarebbe in prima attribuito ad a.

Ma, volendosi che la retta sia tangente, bisogna (§ 65) che esista fra i coefficienti di x la relazione

$$4A^4a^2(y'-ax')^2-4A^2(A^2a^2+B^2)[(y'-ax')^2-B^2]=o,$$

o, sopprimendo le due quantità,

$$4A^4a^2(y'-ax')^2-4A^4a^2(y'-ax')^2,$$

che si distruggono, e dividendo per $4A^2B^2$,

$$-(y'-ax')^2+A^2a^2+B^2=o,$$

oppure, sviluppando, ed ordinando rapporto ad a

$$(A^2-x'^2)a^2+2x'y'.a+B^2-y'^2=o. \; . \; . \; (3).$$

E questa è la condizione generale del contatto di una retta condotta da un qualunque punto (x', y') con l'ellisse.

(L'osservazione del n.° 67, relativa a questa condizione, è applicabile, parola per parola, al quesito che ci occupa; e perciò si rende inutile il ripeterla).

Dall' equazione (3), a simplificazione effettuata si deduce

$$a = -\frac{x'y'}{A^2 - x'^2} \pm \frac{1}{A^2 - x'^2} \sqrt{(A^2y'^2 + B^2x'^2 - A^2B^2} .. (4)$$

risultato che dimostra che da un punto dato N (fig. 101) possono, in generale condursi due tangenti NM, NM'. Ma affinchè il quesito sia possibile, bisogna che sia $A^2y'^2 + Bx'^2 - A^2B^2 > o$ cioè (§ 143), che il punto N sia situato fuori della curva, non dentro, poichè allora si avrebbe

$$A^2y'^2 + B^2x'^2 - A^2B^2 < o,$$

ed il radicale diverrebbe imaginario.

Ciò prova ancora che la curva deve *presentare la sua concavità verso* il centro della curva, perchè altrimenti, si rende facilmente sensibile che la tangente dovrebbe esser situata dentro la curva.

Se si supponga $A^2y'^2 + B^2x'^2 - A^2B^2 = o$ nel qual caso il punto dato è sulla curva, per esempio in M, l' espressione (4) si riduce ad $a = -\frac{x'y'}{A^2 - x'^2}$;

ovvero, chiamando x'' ed y'' le coordinate del punto di contatto, e avendo in vista la relazione

$$A^2y''^2 = B^2 (A^2 - x''^2),$$

$$a = -\frac{B^2}{A^2} \cdot \frac{x''}{y''}.$$

Si ottiene dunque, in questo caso, per l' equazione della tangente

$$y-y''=-\frac{B^2x''}{A^2y''}\ (x-x'').$$

153. Potrebbe giungersi direttamente a questa equazione con un metodo analogo a quello del n.° 68.

Siano (x', y'), (x'', y'') le coordinate di due punti della curva, uno dei quali deve divenire un punto di contatto. La retta, che unisce questi due punti, è rappresentata dal sistema delle

tre equazioni
$$\left\{\begin{array}{ll} y-y'=\dfrac{y'-y''}{x'-x''}(x-x')\ldots & (1) \\ A^2y'^2+B^2x'^2=A^2B^2\ \ldots\ldots & (2) \\ A^2y''^2+B^2x''^2=A^2B^2\ \ldots\ldots & (3) \end{array}\right.$$

Sottraendo la (3) dalla (2) si trova la

$$A^2(y'+y'')(y'-y'')+B^2(x'+x'')(x'-x'')=o\ldots(4)$$

equazione che può sostituirsi alla (2).

Ma la relazione (4) ci dà

$$\frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{B^2}{A^2}\cdot\frac{x'+x''}{y'+y''};$$

dunque la secante è rappresentata ancora dal sistima delle equazioni

$$y-y'=-\frac{B^2}{A^2}\cdot\frac{x'+x''}{y'+y''}(x-x'),\text{e } A^2y''^2+B^2x''^2=A^2B^2.$$

Per esprimere che questa secante divien tangente, convien porre $y'=y''$, $x'=x''$; ciò che in fine ci dà

$$y-y''=-\frac{B^2}{A^2}\cdot\frac{x''}{y''}\ (x-x'')$$

per la equazione della tangente, coll' associarvi tuttavia la relazione

$$A^2\,y''^2+B^2\,x''^2=A^2\,B^2.$$

Si troverebbe, riguardo all' iperbole,

$$y-y''=\frac{B^2}{A^2}\cdot\frac{x''}{y''}(x-x'')..A^2y''^2-B^2x''^2=-A^2B^2,$$

avendo a per valore, $a=\frac{B^2x''}{A^2y''}$.

154. Ripresa la $y-y''=-\frac{B^2}{A^2}\cdot\frac{x''}{y''}\ (x-x'')$ per simplificarla; diverrà prima, togliendo i denominatori, $A^2yy''-A^2y''^2=-B^2xx''+B^2x''^2$; ma abbiamo $A^2y''^2+B^2x''^2=A^2B^2$; dunque l' equazione si ridurrà a $A^2yy''+B^2xx''=A^2B^2$.

Li stessi calcoli effettuati sull' equazione della tangente all' iperbole, la ridurrebbero ad

$$A^2yy''-B^2xx''=-A^2B^2.$$

Queste equazioni non diversificano da quelle dell' ellisse e dell' iperbole se non in quanto che i quadrati y^2 ed x^2 vengono rimpiazzati dai rettangoli yy'' ed xx''.

Nell' equazione semplificata della tangente all' ellisse, facciamo $y=0$, e trovaremo $x=\frac{A^2}{x''}$, (fig. 101); e questa è l' espressione dell' ascissa OR del punto ove la tangente incontra l' asse delle x.

Se da questa distanza OR si sottragga l' ascissa x'' del punto di contatto, ne risulta

$$OR-OP,\ \text{o}\ PR=\frac{A^2}{x''}-x''=\frac{A^2-x''^2}{x''};$$

la retta PR è quella che si denomina *sotto tangente*.

Siccome la sua espressione non dipende dal secondo asse 2B, ne siegue che, per tutte le ellissi costruite sopra il primo asse, *le sotto tangenti che corrispondono alla medesima ascissa, siano eguali.*

E, con altra espressione, se da un punto P del-

l'asse AB s' innalzi una normale che incontri queste ellissi nei punti M, M', ... , e per questi punti si tirino ad esse delle tangenti, queste *si riuniranno tutte nello stessso punto dell' asse delle x.*

Ma il cerchio, descritto sopra AB come diametro, è un' ellisse, dunque *la sottotangente è la stessa tanto per la data ellisse come per il cerchio.*

Risulta da ciò un mezzo semplicissimo per condurre una tangente all' ellisse da un punto dato M: *da questo punto*, *calata la normale* MP, *e dal punto* M', *ove questa normale incontra il cerchio descritto sopra* AB *diametro*, *condotta una tangente che incontri in* R *la* AB, *e guidata la* MR, avremo in questa la tangente che si richiede.

Dal fare similmente $y = o$ nella equazione

$$A^2 yy'' - B^2 xx'' = - A^2 B^2, \text{ si trova}$$

$x = \frac{A^2}{x''} = OR$ (fig. 102); dunque OP — OR, o

$PR = \frac{x''^2 - A^2}{x''}$. Questa espressione della *sottotangente* dell' iperbole è *costante* per tutti i punti (che corrispondono ad una stessa ascissa) delle differenti iperboli descritte sul primo asse 2A.

155. *Osservazione.* Il valore della sottotangente può ottenersi direttamente dall' equazione simplificata della tangente, *col supporvi* $y = o$; *e col determinare il valore che corrisponde ad* $x - x''$.

Avremo infatti, dalla supposizione di $y = o$, nella equazione relativa all' ellisse,

$$x - x'' = \frac{A^2 - y''^2}{B^2 \; x''}, \text{ o, attesochè}$$

$$A^2 y''^2 = B^2 (A^2 - x''^2), \ldots x - x'' = \frac{A^2 \, x''^2}{x''}$$

Se, nella equazione, relativa all'iperbole, si faccia $y = o$, si trova egualmente

$$x - x'' = \frac{A^2 - x''^2}{x''}, \text{ risultato identico con quello}$$

che corrisponde all' ellisse, ma con segno contrario a quello del risultato già ottenuto (§ 154).

Per interpretare questa circostanza, osserviamo che, nell' iperbole, la distanza PR è situata sull' asse delle x, a sinistra del punto P (fig. 102), punto che deve riguardarsi come quello dal quale conviene dipartirsi per valutare la sottotangente; perciò, questa distanza deve esprimersi negativamente; ed, in fatti, avendosi sempre per l' iperbole $x'' > A$, ne siegue che l' espressiene

$$\frac{A^2 - x''^2}{x''} \text{ sia negativa, e si riduca a } -\frac{x''^2 - A^2}{x''}$$

Tanto ci basta per concludere che il primo mezzo impiegato per determinare la sottotangente, ci dà il suo valore assoluto; mentre il secondo ci somministra questo valore *con il segno che deve essergli proprio*, avendo riguardo alla sua posizione rapporto al piede dell' ordinata.

Nell'ellisse, $\frac{A^2 - x''^2}{x''}$ è positivo, perchè la sottotangente è situata a destra del punto P (fig. 101).

(Supporremo qui il punto M di contatto situato a destra dell' asse delle y; perchè, se fosse altrimenti, le conseguenze ora stabilite, avrebbero luogo in senso contrario).

156. Siaci proposto adesso di condurre dal punto di contatto M (fig. 102) una *normale* alla tangente; rintracciccremo l'equazione di questa normale com' anche l' espressione della sotto-normale PS.

Poichè questa retta passa per il punto(x'', y''), la sua equazione avrà la forma

$$y - y'' = a' (x - x'') ;$$

e siccome dev' essere normale alla tangente, per la quale abbiamo

$a = -\frac{B^2 x''}{A^2 y''}$, la relazione $aa' + 1 = o$, ci dà

$$a' = \frac{A^2 y''}{B^2 x''} ;$$

e l' equazione della normale all' ellisse è allora

$$y - y'' = \frac{A^2 y''}{B^2 x''} (x - x'').$$

Così si otterrebbe per l' equazione della normale all' iperbole $y - y'' = -\frac{A^2 y''}{B^2 x''} (x - x'')$

Se, nella prima di queste equazioni, supporremo $y = o$, e dedurremo il valore corrispondente ad $x - x''$ cioè

$$x - x'' = -\frac{B^2}{A^2} . x''$$

sarà questo il valore della *sotto-normale* PS; poichè $x - x''$ rappresenta chiaramente, nel caso di $x = o$, la differenza delle ascisse del punto S ove la normale incontra l' asse delle x, e del punto di contatto M.

Questo valore della sottonormale è poi *negativo*, come dev' essere, poichè vien valutato partendo dal punto P, nel senso negativo.

La stessa ipotesi di $y = o$, introdotta nella equazione della normale all' iperbole, ci dà

$$x - x'' = \frac{B^2}{A^2} . x'' . .$$

La sotto normale è qui positiva, perchè (fig.102)

PS vien valutato a destra del punto P.

157. Dal riflettere al valore assoluto della sottonormale $\frac{B^2}{A^2} \cdot x''$, scorgiamo che, per l'ellisse, più aumenta x'', e più aumenta questo valore.

Sia $x''=o$, nel qual caso il punto di contatto è nell'estremità C dell'asse minore; la sottonormale si *annulla*, ciò che prova che la normale corrispondente passa per il centro.

Sia $x''=A$; allora il punto di contatto è in B; la sottonormale si riduce a $\frac{B^2A}{A^2}$, o $\frac{B}{A}$; e siccome A è il maggior valore che possa ricevere l'ascissa x'', ne siegue che la *sottonormale* sia suscettibile di un *massimo*, che altro non è che la metà del parametro (§ 116), o l'ordinata che passa per il foco.

Nell'iperbole all'opposto, $\frac{B^2}{A}$ è il *minimo* fra le espressioni della sottonormale; e si ottiene col fare $x''=A$. Da qualunque altro valore di x'', quello della normale risulta più grande, e diviene *infinito* quando sia infinito lo stesso x''.

158. Riprendiamo il caso, in cui si tratta di *condurre una tangente all'ellisse o all'iperbole, da un punto dato fuori della curva*, onde dedurre dai risultati alcune proprietà analoghe a quelle già riconosciute per il cerchio (ved. §§ 70, 72, 73).

Siano x', y' le coordinate di un qualunque punto N (fig. 103) dal quale vuol condursi una tangente all'ellisse.

L'equazione di questa tangente è della forma

$$y-y'=a\ (x-x');$$

avendo a per valore (§ 152) $a = -\frac{B^2}{A^2} \cdot \frac{x''}{y''}$;

ed il quesito si riduce a determinare x'', y'', che rappresentano le coordinate del punto di contatto, in funzione di x', y', che esprimono quelle del punto dato.

Ora, dall' essersi trovato (§ 154), per l'equazione semplificata della tangente,

$$A^2 yy'' + B^2 xx'' = A^2B^2 ;$$

e dal dover essa passare, per ipotesi, per il punto (x', y') avremo per prima relazione in x' ed y'',

$$A^2 y'y'' + B^2 x'x'' = A^2B^2 \quad . \ . \ . \ (1).$$

Ma, il punto (x'', y'') appartenendo alla curva, deve aversi per seconda relazione

$$A^2 y''^2 + B^2 x''^2 = A^2B^2 \quad . \ . \ . \ . \ (2).$$

Ora, eliminando x'' ed y'' fra queste due equazioni, una delle quali è di primo grado, si trova, a calcolo effettuato,

$$x'' = \frac{A^2(B^2x' \pm y'\sqrt{(A^2y'^2 + B^2x'^2 - A^2B^2)}}{A^2y'^2 + B^2x'^2},$$

$$y'' = \frac{B^2(A^2y' \mp x'\sqrt{(A^2y'^2 + B^2x'^2 - A^2B^2)}}{A^2y'^2 + B^2x'^2}.$$

Questi valori sostituiti in $a = -\frac{B^2x''}{A^2y''}$, ci danno

$$a = \frac{-(B^2x' \pm y'\sqrt{(A^2y'^2 + B^2x'^2 - A^2B^2}}{A^2y' \mp x'\sqrt{(A^2y'^2 + B^2x'^2 - A^2B^2}},$$

risultato che, dal moltiplicarlo sopra e sotto per

$$A^2y' \pm \sqrt{(A^2y'^2 + B^2x'^2 - A^2B^2)}$$

(ad oggetto di rendere il denominator razionale), si riduce ad

$$a = \frac{-x'y' \pm \sqrt{(A^2y'^2 + B^2x'^2 - A^2B^2}}{A^2 - x'^2};$$

valore ottenuto n.° 152.

L' esecuzione di questi calcoli, che non offrono difficoltà alcuna, tanto più che sono analoghi a quelli già effettuati per il cerchio (§ 70) viene ommessa acciò serva di esercizio ai principianti.

159. In vece di effettuare l' eliminazione possono (§ 51) costruirsi separatamente i luoghi geometrici espressi dalle equazioni (1) e (2); riguardandovi x'' ed y'' come variabili.

Ora; l' equazione (2) è sensibilmente quella dell' ellisse già costruita.

In quanto all' equazione (1), essendo questa di primo grado, appartiene ad una linea retta, la di cui posizione può facilmente determinarsi dai suoi punti d' intersecazione con gli assi.

Otterremo per $y''=o \ldots x''=\frac{A^2}{x'}$,

e per $x''=o \ldots y''=\frac{B^2}{y'}$.

Dopo di aver costruito sopra OX, OY, (fig. 103) le distanze $OI = \frac{A^2}{x'}$ ed $OH = \frac{B^2}{y'}$ si uniranno i punti I ed H con una retta i di cui punti d' intersecazione M ed m con la curva altro non sono che i punti di contatto. Guidando poi NM ed Nm, si otterranno le due tangenti richieste.

Conseguenza. Il risultato $x'' = \frac{A^2}{x'}$, essendo indipendente dall' ordinata y' del punto N, prova che se venisse considerato un' altro punto N' sopra LL' parallela ad OY, e se a questo punto si conducessero due tangenti N'M', N'm', la retta, che

unisce i punti di contatto, passerebbe per lo stesso punto I.

Lo stesso ha luogo rapporto ai punti presi sopra una parallela all'asse delle x; poichè l'espressione $y''=\frac{B^2}{y'}$ è indipendente dall'ascissa x' del punto N.

Questa proprietà, analoga a quella già dimostrata (§ 73) per il cerchio sarà verificata in seguito, riguardo ad una retta situata in qualunque modo nel piano della curva.

I risultati precedenti sono veri egualmente per l'iperbole, e la dimostrazione sarebbe assolutamente la stessa.

160. Affinchè non vi sia cosa alcuna a desiderarsi sul problema delle tangenti, esamineremo cosa divenghino le espressioni

$$a=-\frac{B^2x''}{A^2y''},\quad a=\frac{B^2x''}{A^2y''},$$

quando si riguardi il punto di contatto (x'', y'') in tutte le possibili posizioni sulla curva.

Ellisse. Per poter facilmente determinare le variazioni cui va soggetto il valore di a, porremo in luogo di y'' il suo valore $\pm\frac{B}{A}\sqrt{(A^2-x''^2)}$, ciò che cangerà l'espressione di sopra nell'altra

$$a=\frac{-B^2x''}{\pm A^2\frac{B}{A}\sqrt{(A^2-x''^2)}};$$

ovvero, sopprimendo i fattori comuni e dividendo sopra e sotto per x'', nella

$$a=\mp\frac{B}{A\sqrt{(\frac{A^2}{x''^2}-1)}}.$$

Ciò posto, dal fare prima $x''=o$, nel qual caso il punto di contatto si trova in C o D (fig. 101)

la quantità $\frac{A^2}{x''^2}$, diviene *infinita*; d'onde si deduce $a = o$. Dunque, nei punti C e D, la tangente è parallela *all'asse maggiore*.

A misura che aumenta x'', o positivamente, o negativamente, $\frac{A^2}{x''^2}$ e perciò, $A\sqrt{(\frac{A^2}{x''^2} - 1)}$ diminuisce, ed il valore di a aumenta aritmeticamente di più in più. Quando in fine si suppone $x'' = \pm A$, nel qual caso il punto di contatto si trova in B o in A, il radicale si *annulla*, e si ottiene $a = \infty$; dunque la tangente in questi due punti è *perpendicolare al primo asse*.

Se si fà passare x'' per tutti i stati di grandezza da o fino ad A, è sensibile che il valore di a passerà per tutti i stati di grandezza da o fino all'*infinito negativo*, e da o fino all' *infinito positivo*. Perciò la tangente *prende tutte le inclinazioni possibili* rapporto al primo asse; gli angoli sono *acuti* per tutti i punti situati fra B e D, o fra A e C; sono attusi per quelli situati fra C, e B, o fra D ed A.

Si vuò *saper*, per esempio, *in qual punto la tangente all'ellisse fa coll'asse maggiore un'angolo dato?*

Sia t la tangente di quest' angolo; facendo $\frac{-B^2x''}{A^2y''} = t$, ciò che ci dà l'equazione

$$A^2ty'' + B^2x'' = o;$$

combiniamola con l' altra

$$A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2;$$

col sostituire in questa il valore di y'' dedotto dalla prima; troveremo $B^4x'' + A^2B^2t^2x''^2 = A^4B^2t^2$;

d'onde deducesi $x'' = \frac{\pm A^2 t}{\sqrt{(A^2 t^2 + B^2)}}$,

risultato sempre *reale*, qualunque sia il valore di t.

Sarà però questo necessariamente minore di A, poichè $\sqrt{(A^2 t^2 + B^2)}$ è maggiore di At. Tuttavia se fosse $t = \infty$, si troverebbe

$$\frac{\pm A^2 t}{\sqrt{(A^2 t^2 + B^2)}}, \text{ o } \frac{\pm A^2}{\sqrt{(A^2 + \frac{B^2}{t^2})}} = A.$$

161. *Iperbole.* L'espressione $a = \frac{B^2 x''}{A^2 y''}$ diviene, col sostituirvi ad y'' il suo valore,

$$\pm \frac{B}{A} \sqrt{(x''^2 - A^2)},$$

$$a = (1 - \frac{A^2}{x''^2}) a = \frac{\pm B}{A \sqrt{(1 - \frac{A^2}{x''^2})}}.$$

Facendo in prima $x'' = \pm A$, che è il minor valore che possa ricevere x'', si ottiene $a = \infty$; dunque, nei punti B ed A (fig. 102), la tangente è *perpendicolare* al primo asse.

A misura che aumenta x'', diminuisce il termine $\frac{A^2}{x''^2}$; in conseguenza, il denominatore si approssima sempre più a divenire eguale ad A; e quando si supponga $x'' = \infty$, diviene $a = \pm \frac{B}{A}$; il che dimostra che le tangenti all'infinito fanno con il primo asse li medesimi angoli che gli assintoti.

Per altra parte, riguardando l'ascissa, $x = \frac{A^2}{x''}$, del punto ove la tangente incontra il primo asse

(§ 154), si vede che, nell' ipotesi di $x''=\infty$, quest' ascissa si *annulla*; dunque le tangenti all' infinito passano per il centro.

Possiamo da ciò concludere che *le tangenti all' infinito altro non sono che gli assintoti stessi*.

Osservazione. Finchè x'' è *positivo*, l' espressione $\frac{A^2}{x''}$ resta positiva; e si riduce ad A per $x''=A$, ed a o per $x''=\infty$: perciò, da tutti i punti del primo ramo dell' iperbole, le tangenti incontrano il primo asse fra il vertice B ed il centro. Ha luogo il contrario per tutti i punti del secondo ramo.

Osserviamo altronde che, dalla forma della espressione $\frac{B}{A\sqrt{(1-\frac{A^2}{x''^2})}}$, questa quantità è generalmente maggiore di $\frac{B}{A}$, poichè il denominatore $A\sqrt{(1-\frac{A^2}{x''^2})}$ è minore di A, fuorchè quando si suppone $x''=\infty$ ciò che riduce l' espressione a $\frac{B}{A}$.

Risulta da ciò che la tangente all' iperbole non può mai formare con il primo asse, nè *un' angolo acuto* minore dell' angolo LOX che ha per tangente $\frac{B}{A}$, nè *un' angolo ottuso* > HOX che ha per tangente $-\frac{B}{A}$.

Perciò nell' iperbole equilatera, i di cui assintoti sono rettangolari ossia ciascuno di essi fà con il primo asse un' angolo di 50°, le tangenti non possono

fare con quest' asse un' angolo acuto minore di 50°, nè un' angolo ottuso maggiore di 150°.

Sarebbe agevole il determinare, come per l'ellisse, la posizione del punto ove la tangente all'iperbole deve fare un' angolo dato con il primo asse.

Della tangente riguardata rapporto ai diametri ed alli raggi vettori.

162. Sia MT (fig. 104) una tangente in un qualunque punto M dell'ellisse, MM' il diametro che passa per il punto di contatto.

Si è trovato (§ 152) per il coefficiente di x nell'equazione non semplificata della tangente,

$$a = -\frac{B^2 x''}{A^2 y''}.$$

Per altra parte, poichè il diametro MM', che ha l'equazione della forma $y = a'x$, passa per il punto M, che ha per coordinate x'', y'', avremo la relazione $y'' = a'x''$, onde $a' = \frac{y''}{x''}$.

Moltiplicando fra loro le due espressioni di a ed a' ne risulta $aa' = -\frac{B^2}{A^2}$.

Ma rappresentando con a'' la tangente dell'angolo che forma con l'asse delle x il diametro mm' conjugato del diametro MM', avremo egualmente (§ 133) la relazione $a'a'' = \frac{B^2}{A^2}$,

Dal confronto di queste due eguaglianze abbiamo necessariamente $a = a''$; il che significa che *la tangente, in un qualunque punto dell' ellisse, è parallela al diametro conjugato di quello che passa per il punto di contatto.*

Conseguenza. Se per le estremità M, M′, *m*, *m*′, dei due diametri conjugati, si guidino quattro tangenti, queste rette formano un parallelogrammo circoscritto all'ellisse; poichè le tangenti, condotte dall'estremità del diamentro MM′, sono parallele al diametro *mm*′; e reciprocamente.

Nell'iperbole ha egualmente luogo la proprietà precedente; ma, siccome si è veduto (§ 135) che, per qualunque sistema di diametri conjugati, l'uno è *traverso* e l'altro *non-trasverso*, ne siegue che non possono condursi che le due tangenti TT′, *tt*′ (fig. 105).

163. Questa proprietà ci somministra un mezzo molto semplice per *condurre una tangente all'ellisse o all'iperbole*: 1.° da un punto dato sulla curva: 2.° parallelamente ad una retta di posizione assegnata sopra il piano della curva.

Nel primo caso, *si determini*, con uno dei mezzi indicati (§ § 133 e 150) *il diametro conjugato di quello che passa per il punto di contatto; poi da questo punto, si guidi una parallela al diametro così determinato*; ed otterremo la tangente che si richiede.

Nel secondo; *si delinei un diametro parallelo alla retta data*, poi, *determinato il suo diametro conjugato, dalle estremità di questo, si condurranno due parallele al primo, o alla retta data*; ed avremo in tal modo la richiesta tangente.

Affinchè la seconda costruzione possa applicarsi all'iperbole, bisogna evidentemente che la retta data faccia con l'asse delle x un'angolo acuto maggiore di quello che ha per tangente $\frac{B}{A}$, o un'angolo ottuso minore di quello la di cui tangente è $-\frac{B}{A}$; conseguenza di quanto fu detto (§ 61), sulla inclinazione della tangente nell'iperbole.

164. Consideriamo adesso i due raggi vettori condotti dai fochi F, F', (fig. 106) di un'ellisse nel punto di contatto della tangente MR, e proponiamoci di calcolare gli angoli FMR, F'MR che formano questi raggi vettori con la tangente.

Siano $FMR = V$, $F'MR = V'$;

tang $MRX = a$, tan $MFX = a'$, tang $MF'X = a''$, avremo sensibilmente, dalla figura,

$$\text{tang } V = \frac{a - a'}{1 + aa'}, \quad \text{tang } V' = \frac{a - a''}{1 + aa''}.$$

Ma si è già trovato (§ 152) $a = -\frac{B^2x''}{A^2y''}$. Di più siccome il raggio vettore FM, passa per il punto che ha per coordinate $y = o$, $x = c$, o $\sqrt{(A^2 - B^2)}$, avrà l'equazione della forma $y = a'(x - c)$; e poichè passa nel tempo stesso per il punto x'', y'', avremo la relazione

$$y'' = a'(x'' - c); \quad \text{onde} \quad a' = \frac{y''}{x'' - c}.$$

In simil guisa si otterrebbe per valore di a'', corrispondente al raggio F'M che passa per il punto ($y = o$, $x = -c$) e per lo stesso punto (x'', y''),

$$a = \frac{y''}{x'' + c}.$$

Ciò posto, dal sostituir prima per a ed a' i loro valori nella espressione della tang V, si trova

$$\text{tang } V = \frac{-\frac{B^2x''}{A^2y''} - \frac{y''}{x'' - c}}{1 - \frac{B^2x''y''}{A^2y''(x'' - c)}} = \frac{-B^2x''^2 + B^2cx'' - A^2y''^2}{A^2x''y'' - A^2cy'' - B^2x''y''}.$$

ovvero, attesochè $A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2$, $A^2 - B^2 = c^2$,

$$\text{tang } V=\frac{B^2cx''-A^2B^2}{c^2x''y''-A^2cy''}=\frac{B^2(cx''-A^2)}{cy''(cx''-A^2)}=\frac{B^2}{cy''}.$$

Siccome, per passare dalla tang V alla tang V', basta sostituire a' ad a''; e siccome il valore di a'' non diversifica da quello di a' che per il cambiamenta di c in $-c$, ne siegue che, a calcolo effettuato, debba trovarsi tang $V'=-\frac{B^2}{cy''}$.

Risulta da ciò necessariamente che gli angoli F'MR, F'MR' siano *supplementi* l' uno dell' altro; ossia che dal prolungamento di F'M si abbiano gli angoli GMR, FMR *eguali fra loro*.

Dunque *la tangente all'ellisse divide in due parti eguali l' angolo formato da uno dei raggi vettori* FM *e dal prolungamento* MG *dell' altro raggio vettore.*

Si prolunghi la tangente MR sopra il punto M; avendosi GMR = F'MR', ne risulta FMR = F'MR'. Perciò, può dirsi ancora che *la tangente* RR' *forma con i raggi vettori, nell' uno e nell' altro lato del punto di contatto, due angoli eguali.*

Finalmente, guidando la normale MK, dall' eguaglianza degli angoli FMR, F'MR', si deduce necessariamente quella degli angoli FMK, KMF': dunque *la normale divide in due parti eguali l' angolo formato dai due raggi vettori.*

Queste proprietà diverse sono connesse in guisa fra loro, che, dimostrata una qualunque di esse, immediatamente se ne deducano le altre.

Passiamo all' *iperbole*. Conservando le stesse indicazioni di sopra, abbiamo (fig. 107),

$$\text{tang FMR, o tang } V=\text{tang}(\text{MFX}-\text{MRX})=\frac{a'-a}{1+aa'}$$

$$\text{tang F'MR, o tang } V'=\text{tang}(\text{MRX}-\text{MF'X})=\frac{a-a''}{1+aa''}.$$

Ciò posto, l' espressione di a è per l' iperbole, $a=\frac{B^2x''}{A^2y''}$; abbiamo poi, come per l' ellisse,

$$a'=\frac{y''}{x''-c},\ a''=\frac{y''}{x''+c}.$$

Dai valori di a', a'', sostituiti nella espressione di tang V, si ottiene

$$\text{tang V}=\frac{\frac{y''}{x''-c}-\frac{B^2x''}{A^2y''}}{1+\frac{B^2x''y''}{A^2y''(x''-c)}}=\frac{A^2y''^2-B^2x''^2+B^2cx''}{A^2x''y''-A^2cy''+B^2x''y''},$$

o, attesochè $A^2y''^2-B^2x''^2=-A^2B^2$, $A^2+B^2=c^2$,

$$\text{tang V}=\frac{-A^2B^2+B^2cx''}{c^2x''y''-A^2cy''}=\frac{B^2(cx''-A^2)}{cy''(cx''-A^2)}=\frac{B^2}{cy''}.$$

Riguardo alla espressione di tang V', siccome abbiamo

tang $V'=\frac{a-a''}{1+aa''}$, espressione capace della forma

tang $V'=-\frac{(a''-a)}{1+aa''}$ e siccome dal calcolo $\frac{a''-a}{1+aa''}$

si ottiene $-\frac{B^2}{cy''}$ (ciò che si otterrebbe col cangiare c in $-c$ nel precedente risultato) bisogna necessariamente che sia tang$V'=\frac{B^2}{cy''}$.

Dunque gli angoli FMR, F'MR sono eguali; perciò, nell' iperbole *la tangente divide in due parti eguali l' angolo formato dalli medesimi due raggi vettori.*

165. Dalla proprietà precedente si deduce il mezzo il più comodo ed il più semplice, in generale, per *condurre una tangente all' ellisse o all' iperbole*, 1.° da un punto preso sulla curva: 2.° da un punto preso fuori della curva.

Riguardiamo prima un punto M (fig. 106) dato sull' ellisse. *Condotti i due raggi vettori* FM, F'M; *prolunghiamo* F'M *di un quantità* MG *eguale ad* FM; *uniamo* F *e* G; *e poi caliamo dal punto* M *sopra* FG *una normale*; avremo così la tangente; poichè, a cagione del triangolo isoscele MFG, questa retta divide l' angolo FMG in due parti eguali.

Può dimostrarsi *sintenticamente* che la retta MR che divide FMG in due parti eguali, non ha che il punto M comune con la curva, e che è perciò tangente.

Infatti, sia N un qualunque altro punto di questa retta, e uniamolo con i punti F', F e G. Il triangolo F'NG ci dà $F'N+NG > F'G$; ma, dalla costruzione $NG=NF$, poichè tutti i punti di MR distano egualmente dai punti F e G. Di più, $MG=MF$; onde $F'G=F'M+MF=2A$.

Dunque la precedente ineguaglianza diviene

$$F'N+NF > 2A;$$

ciò che prova (§44) che il punto N è fuori della curva.

Ci venga ora proposto di *condurre una tangente da un punto* N *dato fuori della curva*.

Per ottenere ciò, basterebbe, evidentemente, di conoscere la posizione del punto G; poichè la determinazione di un tal punto, includerebbe quella di F'G, e perciò quella del punto M di contatto.

Ora, questo punto G ha la proprietà di essere in una distanza dal punto F' eguale a 2A, e ad una distanza dal punto N eguale alla distanza NF che ci è cognita. Dopo tale osservazione, per ottenerlo, basta *descrivere dai punti* F', N, *come centri, e con raggi respettivamente eguali a* 2A, NF, *due*

archi di cerchio che si taglino nel punto G, *condotta la* F'G che incontri la curva in M; la retta NM sarà la tangente che si domanda.

Siccome i due archi di cerchio si tagliano in un secondo punto G', se si condurrà F' G', e si unirà il punto N con il punto M' ove la F'G' incontra la curva, si otterrà la seconda tangente che può condursi dal punto N, fintantochè questo punto è situato fuori della curva.

Una costruzione del tutto simile, in ciascuno dei due casi (fig. 107), ha luogo per l'iperbole.

N. B. Osserveremo che la precedente costruzione, e la dimostrazione sintetica che ne abbiamo addotta, sono unicamente basate sulle definizioni dell'ellisse e dell'iperbole, cioè, sulla proprietà caratteristica che ha servito di base alla ricerca delle equazioni di queste curve.

166. Siamo adesso abilitati a render ragione delle denominazioni *fochi*, e *raggi vettori*, date ai punti F, F' ed alle rette FM, F'M.

Per un principio generale ammesso in Fisica, qualunque corpo elastico, che incontra una superficie, riflette in modo che *l'angolo di riflessione eguaglia quello d' incidenza*.

Ciò stabilito, figuriamoci che in uno de' fochi F (fig. 108) di un' ellisse, venga posto un carbone ardente i di cui raggi di calore urtino nella curva in diversi punti M, M', ... , formando questi raggi con le tangenti condotte da questi punti, per il fissato principio fisico, gli angoli FMT, FM'T', chiamati *angoli d' incidenza*. Ora, per il fissato principio fisico, questi raggi devono riflettere in direzioni rettilinee che faccino con M*t*, M'*t'*, ... degli *angoli* (*chiamati angoli di riflessione*) eguali a quelli d'incidenza; dunque i raggi riflessi sono tutti diretti verso il punto F' nel quale soltanto possono aversi gli angoli F'M*t*, F'M'*t'*, ... eguali agli angoli FMT, FM'T', ...

Di modo che, se nel punto F venisse posto un fuoco, o corpo ardente, e nel punto F' una sostanza infiammabile, questa si infiammerà come se fosse situata nello stesso punto F. I diversi punti interni della curva si risentiranno più o meno della radiazione del calorico, ma il punto F' sarà l'unico ove andranno a concentrarsi i raggi partiti dal punto F.

Nell' iperbole, partendo i raggi del calorico dal punto F (fig. 109) e venendo a colpire la curva nei punti M, M', . . . , si rifletterebbero nell' interiore, secondo la direzione delle rette Mf, $M'f'$, . . . le quali, prolungate in senso contrario, andrebbero tutte a finire nel punto F'; poichè dall' eguaglianza degli angoli FMT, TMF', s' inferisce quella degli angoli FMT, fMt, etc . . .

167. *Conseguenze* della proprietà del numero 164.

Prima. Siccome, per fissare la posizione della tangente in un dato punto M (fig. 106), abbiam preso (§ 165) MG=MF, e, dopo di aver guidata la retta FG, abbiam calata dal punto M una perpendicolare sopra FG, ne siegue che questa ultima retta venga divisa in due parti eguali nel punto I. Dunque, unendo il centro O con il punto I, che può riguardarsi come il piede della perpendicolare calata dal foco F sulla tangente, verranno a formarsi due triangoli simili FOI, FF'G, poichè abbiamo

$$OF = OF' \quad \text{ed} \quad IF = IG.$$

Perciò questi triangoli danno F'G : OI :: F'F : OF; ma OF è la metà di F'F, e per costruzione F'G è eguale a 2A; dunque OI = A.

Di qui è che risulta la seguente proprietà: *Se da uno de' fochi di un' elisse, si cali una perpendicolare sopra una qualunque tangente, la distanza del centro dal piede della perpendicolare eguaglia la metà del primo asse*; o, con altra espressione, ***il luogo geometrico dei piedi di tutte***

le perpendicolari, calate da uno qualunque dei fochi sopra le tangenti alla curva, è la circonferenza del cerchio descritta sopra 2A come diametro.

Questa proprietà ha luogo egualmente per l'iperbole, e si dimostra nella stessa maniera (fig. 107).

168. *Seconda conseguenza.* Vengano calate dai punti F, ed F' le due perpendicolari FI, F'I' sopra la tangente RR'; le distanze OI, OI' si sono ora vedute eguali ad A.

Ciò posto, se dai punti O, F si guidino le OL, FL' parallele alla tangente, avremo dalla figura,

$$I'F' = I'L + LF',$$

$$IF = I'L' = I'L - LF'; \text{ d'onde deducesi}$$

$$I'F' \times IF = \overline{I'L}^2 - \overline{LF'}^2;$$

ma i triangoli rettangoli I'OL, F'OL, nei quali

$$OI' = A, \quad \text{ed} \quad OF' = c, \quad \text{o} \quad \sqrt{(A^2 - B^2)},$$

$$\text{ci danno} \quad \overline{I'L}^2 = A^2 - \overline{OL}^2, \quad \overline{F'L}^2 = c^2 - \overline{OL}^2,$$

otterremo dunque

$$I'F' \times IF = A^2 - \overline{OL}^2 - c^2 + \overline{OL}^2 = A^2 - c^2 = B^2.$$

Dunque, nell'ellisse, *il prodotto delle perpendicolari, condotte dai due fochi sopra una tangente, è eguale al quadrato della metà del secondo asse.*

Nell'iperbole, si trova $I'F' \times IF = -B^2$ (fig. 107), perchè le due perpendicolari sono situate in senso contrario riguardo alla tangente.

169. *Terza conseguenza.* Venga condotto il diametro mm' (fig. 106) conjugato di quello che passa per il punto di contatto della tangente RR'. Guidiamo poi i raggi vettori FM, F'M, e la retta OI

che unisca il centro con il piede della perpendicolare calata dal foco F sulla tangente.

Abbiam veduto (§ 162) che il diametro mm' è parallelo alla tangente; altronde poi OI è parallelo ad F'M attesa la somiglianza dei triangoli FOI, FF'G; dunque la figura OIMH è un parallelogrammo, che ci dà MH = OI = A.

Perciò, nell' ellisse ed iperbole, *la parte di un raggio vettore, compreso fra la tangente ed il diametro conjugato di quello che passa per il punto di contatto, eguaglia la metà del primo asse.*

Tutte queste proprietà, facilmente dedotte da quella della tangente riguardo ai raggi vettori, troveranno in seguito le applicazione opportune.

§ II. *Proprietà dell' Ellisse e dell' Iperbole riferite ai loro diametri conjugati.*

170. La proprietà caratteristica di qualunque sistema di diametri conjugati consistendo (§ 131) nel dividere ciascuno di essi in due parti eguali tutte le corde della curva condotte parallelamente all' altro, ne siegue che, dal riferire la curva ad un tal sistema, la nuova equazione non debba racchiudere che i quadrati delle coordinate ed una quantità del tutto nota, cioè, che debba essere della stessa forma di quella della curva riferita ai suoi assi principali. Potremmo dunque fissare immediatamente, per l' equazione della curva riferita ad uno di questi sistemi, $My^2 \pm Nx^2 = \pm P$, equazione che potrebbe in seguito, mediante una trasformazione, analoga a quella dei N. 103 e 136, ridursi all' altra:

$$A'^2y^2 \pm B'^2x^2 = \pm A'^2B'^2.$$

Ma si concepisce che, per ciascun sistema di una direzione assegnata, le costanti 'A e B' che, come si vede facilmente, rappresentano i semi-diametri,

devono avere alcune relazioni con i semiassi; relazioni che devono ora determinarsi.

Per poter ciò effettuare in un modo generico, ci proporremo il seguente quesito: *l'equazione di un' ellisse o di un' iperbole riferita ai suoi assi principali, essendo data, si richiede di riferir la curva ad un nuovo sistema di tal' indole, che la nuova equazione conservi la forma medesima.* Sarà questa una semplice applicazione della trasformazione delle coordinate.

Occupiamoci prima dell'ellisse che ha per equazione

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2.$$

Sostituiremo qui, in luogo di x, y, i valori

$$x=x\cos\alpha+y\cos\alpha',$$

$$y=x\ \text{sen}\ \alpha+y\ \text{sen}\ \alpha',$$

per passare (§ 89) da un sistema rettangolare ad uno obliquo colla stessa origine.

Otterremo con ciò

$$(A^2\ \text{sen}^2\ \alpha'+B^2\cos^2\alpha')y^2+2(A^2\ \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \alpha'+B^2\cos\alpha\cos\alpha'$$

$$\times xy+\ldots\ldots+(A^2\text{sen}^2\alpha+B^2\cos^2\alpha)x^2=A^2B^2.$$

Ma, per ipotesi, l'equazione racchiuder non deve che i quadrati delle variabili e quantità del tutto note; convien dunque che abbiasi il coefficiente di $xy=o$; ciò che dà

$$A^2\ \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \alpha'+B^2\cos\alpha\cos\alpha'=o\ \ldots\ (1),$$

e l' equazione si riduce ad

$$(A^2\ \text{sen}^2\alpha'+B^2\cos^2\alpha')y^2+(A^2\ \text{sen}^2\alpha+B^2\cos^2\alpha)x^2=A^2B^2\ldots(2).$$

Dividendo ora la (1) per $\cos\alpha\cos\alpha'$, otterremo.

$$A^2\ \text{tang}\ \alpha\ \text{tang}\ \alpha'+B^2=o;\ \text{onde}\ \text{tang}\ \alpha\ \text{tang}\ \alpha'=-\frac{B^2}{A^2}$$

Risultando da ciò una sola equazione per determinare gli angoli α, α', ne siegue che *il numero dei sistemi dei diametri conjugati sia infinito*. Questa relazione è altronde identica con quella del n.° 133; e le consequenze che ne furono dedotte in allora, vengono qui a riprodursi egualmente.

Supponiamo successivamente nella equazione (2)

$$\left.\begin{array}{l} y=o, \\ \\ x=o, \end{array}\right\} \text{ne risulterà} \left\{\begin{array}{l} x^2=\dfrac{A^2 B^2}{A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + B^2 \cos^2 \alpha} \\ \\ y^2=\dfrac{A^2 B^2}{A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha' + B^2 \cos^2 \alpha'} \end{array}\right\}$$

Da queste espressioni veniamo a conoscere i quadrati delle distanze OM, Om (fig. 104), o dei *semi-diametri conjugati*. Dunque, rappresentando con 2A', 2B', le lunghezze totali MM', *mm'*, avremo le relazioni

$$\left.\begin{array}{l} A'^2=\dfrac{A^2 B^2}{A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + B^2 \cos^2 \alpha} \\ \\ B'^2=\dfrac{A^2 B^2}{A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha' + B^2 \cos^2 \alpha'} \end{array}\right\} \text{onde} \left\{\begin{array}{l} A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + B^2 \cos^2 \alpha' = \dfrac{A^2 B^2}{A'^2}, \\ \\ A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha' + B^2 \cos^2 \alpha' = \dfrac{A^2 B^2}{B'^2} \end{array}\right.$$

Sostituendo questi valori nella (2) si otterrà in fine

$$A'^2 y^2 + B'^2 x^2 = A'^2 B'^2$$

per equazione dell' ellisse riferita ad un sistema qualunque di diametri conjugati.

E siccome per $x = \pm A'$, abbiamo da questa equazione $y^2 = o$, e per $y = \pm B'$, risulta $x^2 = o$, concluderemo che le rette guidate per i punti M, M', *m*, *m'* parallelamente ai due diametri, sono tangenti alla curva; proprietà già altrove veduta (§ 162).

Per l' iperbole, si otterrebbero l' equazioni

$A^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha' - B^2 \cos \alpha \cos \alpha' = 0$, onde $\operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \alpha' = \frac{B^2}{A^2}$

ed $(A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha' - B^2 \cos^2 \alpha') y^2 + (A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - B^2 \cos^2 \alpha) x^2 = - A^2 B^2$,

la prima delle quali esprime che i nvovi assi formano un sistema di diametri conjugati, e l'altra rappresenta la curva riferita a questo sistema.

Dal fare successivamente in questa equazione

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ \\ x = 0 \end{array}\right\} \text{ si trova } \left\{\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{-A^2 B^2}{A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - B^2 \cos^2 \alpha} \\ \\ y^2 = \dfrac{-A^2 B^2}{A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha' - B^2 \cos^2 \alpha'} \end{array}\right\}$$

Deve però osservarsi che l'uno dei due quadrati è *positivo* e l'altro *negativo*; poichè si è veduto (§136) che, per qualunque sistema di diametri, l'uno è *trasverso* e l'altro *non-trasverso*; d'onde siegue che se il valore di x corrispondende ad $y = 0$, è *reale*, quello di y, corrispondente ad $x = 0$; dev' essere *immaginario*; o reciprocamente. (Vedasi il numero che siegue).

Supponiamo, ciò che è sempre permesso, che siasi preso per asse delle x il *diametro trasverso*; in questo caso, l'espressione di x^2 è positiva, ma quella di y^2 è negativa. Rappresendando dunque la prima con A'^2 e la seconda con $-B'^2$, si otterranno le relazioni

$$\left.\begin{array}{l} A'^2 = \dfrac{-A^2 B^2}{A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - B^2 \cos^2 \alpha} \\ \\ -B'^2 = \dfrac{-A^2 B^2}{A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha' - B^2 \cos^2 \alpha'} \end{array}\right\} \text{onde} \left\{\begin{array}{l} A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - B^2 \cos^2 \alpha = -\dfrac{A^2 B^2}{A'^2} \\ \\ A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha' - B^2 \cos^2 \alpha' = \dfrac{A^2 B^2}{B'^2} \end{array}\right.$$

Questo valore portato nell'equazione della curva ci darà, a riduzione effettuata

$$A'^2 y^2 - B'^2 x^2 = -A'^2 B'^2.$$

Se, al contrario, si eguagliasse la prima, a $-B'^2$, e la seconda ad A'^2, si troverebbe

$$B'^2y^2 - A'^2x^2 = A'^2B'^2$$

per equazione dell' iperbole riferita al diametro *non-trasverso*; come asse delle x (ved. § 110).

171. Che le due espressioni di x^2 ed y^2 abbiano segni contrarj, può dimostrarsi direttamente.

Infatti, moltiplichiamole fra loro: sarà il prodotto $\dfrac{A^4B^4}{(A^2\text{sen}^2\alpha - B^2\cos^2\alpha)(A^2\text{sen}^2\alpha' - B^2\cos\alpha')}$

Ora, dallo sviluppo del denominatore, si ottiene

$$A^4\text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha' + B^4\cos^2\alpha\cos^2\alpha' - A^2B^2 \times (\text{sen}^2\alpha'\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha');$$

ma la relazione

$A^2\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\alpha' - B^2\cos\alpha\cos\alpha' = o$, ci dà

$$A^4\text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha' + B^4\cos^2\alpha\cos^2\alpha' = 2A^2B^2\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\alpha'\cos\alpha\cos\alpha';$$

dunque il denominatore diviene

$$A^2B^2(2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\alpha'\cos\alpha\cos\alpha' - \text{sen}^2\alpha'\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha');$$

espressione che cangiasi ancora nella seguente:

$-A^2B^2(\text{sen}\alpha'\cos\alpha - \text{sen}\alpha\cos\alpha')^2$, o $-A^2B^2\text{sen}^2(\alpha' - \alpha')$

Perciò il prodotto di sopra si riduce a

$$\frac{A^4B^4}{-A^2B^2\text{sen}^2(\alpha'-\alpha)}, \text{ o infine a } -\frac{A^2B^2}{\text{sen}^2(\alpha'-\alpha)}$$

Questo risultato, essenzialmente *negativo*, prova che i valori di x^2 ed y^2 hanno *segni contrarj*.

Rappresentiamo dunque, come si è praticato nel n.° precedente, il valore di x^2 con A'^2, quello di y^2 con $-B'^2$; e giungeremo alla rimarchevole rela-

zione $-A'^2B'^2 = -\frac{A^2B^2}{\text{sen}^2(\alpha'-\alpha)}$, d' onde

$$A'.B'.\text{sen}\,(\alpha'-\alpha) = A.B.$$

Li stessi calcoli effettuati sulle espressioni

$$A'^2 = \frac{A^2B^2}{A^2\text{sen}^2\alpha + B^2\cos^2\alpha}\,,\quad B'^2 = \frac{A^2B^2}{A^2\text{sen}^2\alpha' + B^2\cos^2\alpha'},$$

relative all' ellisse, ci darebbero per risultato

$A'^2B'^2\text{sen}^2(\alpha'-\alpha) = A^2B^2$; onde $A'.B'.\text{sen}(\alpha'-\alpha) = A.B.$

172. Vediamo cosa significhi in Geometria un simile risultato.

Siano M M', mm', (fig. 104) due diametri conjugati dalle di cui estremità siansi condotte delle tangenti che, come si è già veduto, determinano un parallelogrammo $TT'\,tt'$, quadruplo del parallelogrammo $OMTm$.

Se dal punto M, si cali $m\,i$ perpendicolare sopra O M, si avrà $OMTm = OM \times mi = A' \times m\,i$; ma il triangolo rettangolo $O\,i\,m$ dà $mi = Om \times \text{sen}\,mOi$, o

$$M\,i = B'.\ \text{sen}\ mOM = B'\ \text{sen}\,(\alpha' - \alpha)\,;$$

dunque $\qquad OMTm = A'.\,B'.\ \text{sen}\,(\alpha' - \alpha).$

E potremo da ciò conchiudere che *il parallelogrammo costruito sopra i semi diametri conjugati* OM, O*m è eguale al rettangolo costruito sopra i semi-assi.*

Questo risultato è indipendente affatto dal sistema dei diametri conjugati presi in considerazione.

Siccome la relazione

$A'.\,B'\,\text{sen}\,(\alpha'-\alpha) = A.B$ può trasformarsi nell' altra: $2\,A'.\ 2\,B'.\ \text{sen}\,(\alpha'-\alpha) = 2\,A.\ 2\,B$, possiamo ancora stabilire che *tutti i parallelogrammi circoscritti all' ellisse, i di cui lati sono respettivamente paralleli a due diametri conjugati hanno una*

superficie costante per tutti i sistemi dei diametri conjugati, ed eguali al rettangolo costruito sopra gli assi.

173. *N. B.* Questa superficie costante ha la proprietà di essere *un minimo* fra quelle dei diversi parallelogrammi che possono, in generale, circoscriversi ad una data ellisse.

In fatti, esaminiamo, per esempio, un parallelogrammo UVV'U', due lati del quale siano le tangenti condotte dalle estremità del diametro mm', e gli altri due siano le tangenti guidate per le estremità di un diametro nn' non conjugato di mm' Prolunghiamo altronde $m\,i$ finchè s' incontri in l con la base U'V'. Avremo, per la superficie di questo parallelogrammo, $U'V' \times m\,l$.

Ma il triangolo rettangolo $m\,l\,m'$ ci dà $m\,l = m\,m'.\ \text{sen}\ m\,m'\,l$, o $m\,l = 2\,B' \times \text{sen}\ m\,OM = 2\,B'.\ \text{sen}\ (\alpha' - \alpha)$.

Per altra parte, è chiaro che U'V', che è parallela ad MM', è maggiore di MM' o 2 A', poichè i lati UU', VV' sono esteriori all' ellisse.

Dunque $U'V' \times m\,l$ è maggiore di $2\,A' \times 2\,B'$ sen $(\alpha' - \alpha)$. *Ciò che dovea dimostrarsi.*

174. La proprietà del n.° 172 può applicarsi egualmente all' iperbole. Siano MM', NN' due qualunque diametri conjugati; dal supporre che MM' (fig. 105) rappresenti il diametro 2 A', e che venga presa, sulla direzione di NN', $O\,m = O\,m' = B$, il parallelogrammo OMTm ha per espressione

$$OM \times O\,m.\ \text{sen}\ m\,OM = A'.\ B'.\ \text{sen}\ (\alpha' - \alpha);$$

ed il parallelogrammo formato dalle tangenti TT', $t\,t'$ con le rette $T\,t$, $T'\,t'$ condotte per i punti m, m', parallelamente ad MM', è eguale a

$$2A' \times 2\,B'.\ \text{sen}\ (\alpha' - \alpha).$$

Ma, si è veduto (§ 171) che queste espressioni sono respettivamente eguali ad A×B, e 2 A × 2B; dunque, etc.

I parallelogrammi come TT′ tt' i di cui lati sono paralleli ed eguali a due diametri conjugati, si denominano *parallelogrammi iscritti* all' iperbole.

175. Sarà opportuno di qui avvertire, relativamente al rettangolo EE′ *e* e' costruito sugli assi, che, siccome gli assintoti OL, OH sono stati determinati (§ 108) prendendo sulla perpendicolare innalzata nel punto B, due parti BE, BE′ eguali alla metà del secondo asse, perciò i vertici E, E', e', e, *di questo parallelogrammo rettangolo sono situati sopra gli assintoti.*

Questa proprietà è comune a tutti i parallelogrammi iscritti, de' quali abbiamo ora parlato.

Per dimostrarlo, osserveremo prima che, l' equazione dell' iperbole, riferita ad un qualunque sistema di diametri conjugati, essendo

$$A'^2y^2 - B'^2x^2 = -A'^2B'^2,$$

d' onde si deduce

$$y^2 = \frac{B'^2}{A'^2}(x^2 - A'^2), \text{ o } y = \pm\frac{B'x}{A'}\sqrt{\left(1 - \frac{A'^2}{x^2}\right)},$$

la parte $y = \pm\frac{B'}{A'}x$ è l' equazione degli assintoti riferiti al medesimo sistema di assi.

In fatti, si scorge, riguardando il valore completo di y, che più aumenta x, e meno il radicale differisce dall' unità, e perciò, più l' ordinata della curva si approssima a divenire eguale a quella del sistema delle due rette espresse da $y = \pm\frac{B'}{A'}x$. Finchè x ha un valore *finito*, la differenza di queste ordinate non si annulla, ma può essa divenire così piccola quanto si vuò, e si riduce a 0, quando si supponga $x = \infty$.

Dunque gli assintoti che hanno per equazione

$y = +\frac{B}{A}x$ ed $y = -\frac{B}{A}x$, quando vengono riferiti al sistema degli assi principali, sono poi rappresentati da

$$y = +\frac{B'}{A'}x, \qquad y = -\frac{B'}{A'}x,$$

qualora si riferiscono ad un sistema di diametri conjugati.

Siano perciò OM, ON (fig. 110) due diametri conjugati ai quali si suppone riferita la curva; l'equazione

$y = \pm\frac{B'}{A'}x$ rappresenta i due assintoti riferiti allo stesso sistema, valutando le x sopra OM e le y parallelamente ad ON.

Ciò posto, facendo in questa equazione $x = A$, otterremo $y = \pm B'$; il che prova che, se pel punto M si conduca una parallela ad NN', o, che è lo stesso (§ 162), una tangente alla curva, *le parti* MT, MT' *di questa tangente comprese fra il punto di contatto* M *e i due assintoti sono eguali fra loro, e, di più, ciascuna è eguale alla metà del diametro conjugato di* MM'.

Lo stesso risultato per la tangente condotta dal punto M'

Dunque; dal riunire i punti T t' e $T't'$, la figura così formata, altro non sarà che un parallelogrammo i di cui lati sono eguali e paralleli a $2A'$, $2B'$.

176. La medesima equazione $y = \pm\frac{B'}{A'}x$ prova ancora che, per un' ascissa qualunque OP, le ordinate PR, PR' sono eguali e con segni contrarj; risulta poi, dall' equazione della curva,

$y = \pm \frac{B'}{A'} \sqrt{(x^2 - A'^2)}$, che le ordinate PS, PS′ corrispondenti alla stessa ascissa OP, siano anch'esse eguali e con segni contrarj; dunque PR — PS, o RS = PR′ — PS′ o R′S′.

D'onde raccogliesi, che *le due parti di una secante comprese fra la curva e gli assintoti, sono eguali fra loro.*

Quest' ultima proprietà è vera, qualunque sia la direzione della secante sul piano della curva; poichè possiamo sempre figurarci che passi per il centro un diametro parallelo ad una secante di posizione assegnata, per poi determinare il suo diametro conjugato; e supporre in fine la curva ed i suoi assintoti riferiti a questo sistema di diametri conjugati. È allora che l' addotta dimostrazione avrà un' applicazione immediata.

Sarà in appresso che torneremo a discutere queste singolari proprietà degli assintoti. Adesso il nostro primario oggetto si è di far vedere che *i vertici dei parallelogrammi i di cui lati sono eguali e paralleli ad un sistema di diametri conjugati, trovansi situati negli assintoti.*

177. Ripresi adesso i valori di A'^2 e B'^2 ottenuti (§ 170) per l' ellisse, ponendo in queste espressioni in luogo di $\text{sen}^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, $\text{sen}^2\alpha'$, $\cos^2\alpha'$, i loro valori in funzione di tang α, cioè:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\text{tang}^2\alpha}, \quad \text{sen}^2\alpha = \frac{\text{tang}^2\alpha}{1+\text{tang}^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha' = \frac{1}{1+\text{tang}^2\alpha'}, \quad \text{sen}^2\alpha' = \frac{\text{tang}^2\alpha'}{1+\text{tang}^2\alpha'};$$

otterremo

$$A'^2 = \frac{A^2B^2(1+\text{tang}^2\alpha)}{A^2\text{tang}^2\alpha + B^2}, \quad B'^2 = \frac{A^2B^2(1+\text{tang}^2\alpha')}{A^2\text{tang}^2\alpha' + B^2}$$

equazioni che, riunite all' equazione di condizione

$$\tang \alpha . \tang \alpha' = -\frac{B^2}{A^2},$$

racchiudono le sei quantità, A, B, A', B', tangα, tang α'; dunque, eliminando fra queste equazioni le quantità tang α, tang α', giungeremo necessariamente ad ottenere una certa relazione fra le quantità A, B, A', B'.

Ora, dalle due prime equazioni, si deduce

$$\tang^2 \alpha = \frac{B^2(A^2-A'^2)}{A^2(A'^2-B^2)}, \quad \tang^2 \alpha' = \frac{B^2(A^2-B'^2)}{A^2(B'^2-B^2)},$$

onde $\tang^2 \alpha . \tang^2 \alpha' = \frac{B^4}{A^4} \times \frac{(A^2-A'^2)(A^2-B'^2)}{(A'^2-B^2)(B'^2-B^2)}$,

Per altra parte, abbiamo dalla terza equazione $\tang^2 \alpha . \tang^2 \alpha' = \frac{B^4}{A^4}$; dunque avremo la relazione

$$\frac{(A^2-A'^2)(A^2-B'^2)}{(A'^2-B^2)(B'^2-B^2)} = 1.$$

Togliendo il denominatore, e sviluppando i calcoli,

$$A^4-A^2A'^2-A^2B'^2+A'^2B'^2=A'^2B'^2-B^2B'^2-A'^2B^2+B^4$$

riducendo e trasportando,

$$A^4-B^4 = A'^2(A^2-B^2)+B'^2(A^2-B^2).$$

Dividendo finalmente per A^2-B^2 troveremo

$$A'^2+B'^2 = A^2+B^2, \quad \text{o} \quad 4A'^2+4B'^2 = 4A^2+4B^2,$$

ciò che prova che, nell' ellisse, *la somma dei quadrati di due qualunque diametri conjugati è eguale alla somma dei quadrati degli assi.*

Operando al modo istesso riguardo all' iperbole, si troverebbe

$$A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2, \quad \text{o} \quad 4A'^2 - 4B'^2 = 4A^2 - 4B^2;$$

cioè che *la differenza dei quadrati dei diametri conjugati eguaglia la differenza dei quadrati degli assi.*

178. Quest'ultima proprietà, e quella del parallelogrammo circoscritto o iscritto, potrebbero altronde dedursi con molta semplicità da un calcolo di molta importanza in se stesso, e che ha per oggetto, *data l' equazione di un' ellisse* o *d'un' iperbole riferita ad un certo sistema di diametri conjugati, rinvenire l' equazione della stessa curva riferita al sistema de' suoi assi principali.*

Per risolver tal quesito riguardo all' ellisse, ci prevarremo delle formole del n.° 91.

$$x = \frac{x \operatorname{sen}(\beta - \alpha) - y \cos(\beta - \alpha)}{\operatorname{sen}\beta}, \quad y = \frac{x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta},$$

che servono per passare da un sistema obliquo ad un sistema rettangolare della medesima origine.

Sostituendo questi valori nell' equazione,

$$A'^2 y^2 + B'^2 x^2 = A'^2 B'^2,$$

e togliendo il denominatore, si ottiene la

$$\left.\begin{array}{l} [A'^2 \cos^2\alpha + B'^2 \cos^2(\beta - \alpha)] y^2 \\ + [2A'^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha - B'^2 \operatorname{sen}(\beta - \alpha) \cos(\beta - \alpha)] xy \\ + [A'^2 \operatorname{sen}^2\alpha + B'^2 \operatorname{sen}^2(\beta - \alpha) x^2 \end{array}\right\} = A'^2 B'^2 \operatorname{sen}^2\beta.$$

Siccome il nuovo sistema di assi deve goder sempre la proprietà caratteristica dei diametri conjugati (§ 31), bisogna che scomparisca il termine in xy, il che richiede che sia

$$A'^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha - B'^2 \operatorname{sen}(\beta - \alpha) \cos(\beta - \alpha) = 0 \quad . \; . \; . \; (1);$$

e in allora si riduce l' equazione ad

$$\left.\begin{array}{l}[A'^2\cos^2\alpha+B'^2\cos^2(\beta-\alpha)]y^2\\+[A'^2\text{sen}^2\alpha+B'^2\text{sen}^2(\beta-\alpha]x^2\end{array}\right\}=A'^2B'^2\text{sen}^2\beta\ldots\ldots(2).$$

Risulta poi dalla natura della trasformazione, che il sistema attuale dei diametri conjugati sia un sistema *rettangolare*; dunque questo sistema è quello degli assi principali, poichè si è veduto (§ 134) esser questo il solo sistema dei diametri conjugati *perpendicolari fra loro*.

Perciò, dovrà riguardarsi l'equazione (2) come quella dell'ellisse riferita al suo centro ed ai uoi assi. Tuttavia, per poterla paragonare con la

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2,$$

necessita che il secondo membro sia il prodotto dei coefficienti di y^2 ed x^2. Ma per ridurla a tale stato, sappiamo (§ 103) che basta moltiplicare i due membri con un fattore K eguale a $\frac{P}{MN}$; rappresentando M, N i coefficienti di y^2 ed x^2, e P la quantità tutta nota che è nel secondo membro.

Calcoliamo dunque questo valore di K relativo all'equazione (2); avremo

$$K=\frac{A'^2B'^2\text{sen}^2\beta}{[A'^2\cos^2\alpha+B'^2\cos^2(\beta-\alpha)]\,[A'^2\text{sen}^2\alpha+\beta'^2\text{sen}^2(\beta-\alpha)]}.$$

Effettuando i calcoli indicati dal denominatore, ed osservando che l'equazione di condizione (1), innalzata al quadrato, ci dà

$$A'^4\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha+B'^4\text{sen}^2(\beta-\alpha)\cos^2(\beta-\alpha)$$

$$=2A'^2B'^2\text{sen}\alpha\cos\alpha\,\text{sen}(\beta-\alpha)\cos(\beta-\alpha)$$

si conosce che questo denominatore prender deve la forma

$$A'^2B'^2[\text{sen}^2\alpha\cos^2(\beta-\alpha)+\text{sen}^2(\beta-\alpha)\cos^2\alpha$$

$$+2\,\text{sen}\,\alpha\cos(\beta-\alpha)\text{sen}(\beta-\alpha)\cos\alpha]\ ,\ \text{o}$$

$$A'^2B'^2[\text{sen}\,\alpha\cos(\beta-\alpha)+\text{sen}(\beta-\alpha)\cos\alpha]^2$$

o, finalmente, $A'^2B'^2\text{sen}^2(\alpha+\beta-\alpha) = A'^2B'^2\text{sen}^2\beta.$

Dunque diviene il valore di. $K = \dfrac{A'^2B'^2\text{sen}^2\beta}{A'^2B'^2\text{sen}^2\beta} = 1$;

ciò che prova che l' equazione (2) non ha bisogno di veruna preparazione per paragonarsi con l' equazione $A^2y^2+B^2x^2 = A^2B^2$.

Avremo dunque immediatamente le relazioni

$$A'^2\cos^2\alpha+B'^2\cos^2(\beta-\alpha) = A^2\ ,$$

$$A'^2\text{sen}^2\alpha+B'^2\text{sen}^2(\beta-\alpha) = B^2;$$

$$A'^2B'^2\text{sen}^2\beta = A^2B^2.$$

Dall' addizionare le due prime relazioni si ottiene

$$A'^2+B'^2 = A^2+B^2.$$

Dalla terza si ottiene immediatamente

$$A'B'\text{sen}\beta = AB.$$

Ora, essendo β l' angolo che fanno fra loro i due diametri conjugati, avremo $\beta = \alpha'-\alpha$, d' onde deducesi $A'B'\text{sen}(\alpha'-\alpha) = AB$.

Li stessi calcoli, riguardo all' iperbole, ci darebbero

$$A'^2-B'^2 = A^2-B^2\ ,\ A'B'\text{sen}(\alpha'-\alpha) = AB.$$

N. B. Se, nel precedente quesito, ci piacesse di determinare l' angolo α che forma il nuovo asse delle x con il primitivo, basterebbe risolvere l' equazione di condizione (1) rapporto ad α.

Moltiplicata per 2, si trasforma nella

$$A'^2\ \text{sen}\ 2\ \alpha - B'^2\ \text{sen}\ (2\beta-2\ \alpha) = o\ ,$$

[attesochè $2\ \text{sen}\ \alpha\ \cos\ \alpha = \text{sen}\cdot 2\ \alpha$,

$2 \text{ sen } (\beta - \alpha) \cos (\beta - \alpha) = \text{sen } 2 (\beta - \alpha)$]
ovvero, sviluppando sen $(2\beta - 2\alpha)$ e dividendo per cos 2α,

$$A'^2 \operatorname{tang} 2\alpha - B'^2 \text{ sen } 2\beta + B'^2 \cos 2\beta \operatorname{tang} 2\alpha = o,$$

dunque $$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{B'^2 \text{ sen } 2\beta}{A'^2 + B'^2 \cos^2 \beta}.$$

Costruito che siasi l'angolo 2α, col dividerlo, in due parti eguali, si otterrebbe la direzione di uno degli assi principali; l'altro sarebbe poi determinato, poichè dev' essere perpendicolare al primo.

179. Nell' ellisse, esiste un certo sistema di diametri conjugati che merita una particolare attenzione. Questo sistema è quello di due diametri II', LL' (fig. 100) paralleli alle corde supplimentarie AC, BC, (ved. §. 151).

Poichè il triangolo ACB è isoscele; gli angoli CAB, ABC sono eguali; dunque ancora gli angoli IOB, LOA sono eguali.

Ma, attesa la simetria della curva riguardo agli assi AB, CD, è evidente che due diametri, che fanno angoli eguali con AB dall' una e dall' altra parte del centro, debbano avere lunghezze eguali; perciò avremo, per questo sistema particolare, II', o $2A' = LL'$ o $2B'$, e l' equazione della curva, riferita a un tal sistema, diviene

$$y^2 + x^2 = A'^2;$$

cioè l' equazione ha la forma di quella del cerchio riferita al suo centro, e agli assi rettangolari. Possiamo da ciò concludere che un' equazione, come $y^2 + x^2 = k^2$, che rappresenta una circonferenza di cerchio, quando siano rettangolari gli assi, esprime, nella ipotesi di assi obliqui, *un' ellisse riferita ad un sistema di diametri conjugati eguali.*

Questo sistema è poi *unico* in tutta l' ellisse;

poichè, ad oggetto che due diametri abbiano la stessa lunghezza, bisogna che la loro inclinazione verso l'asse maggiore sia la medesima da una e dall' altra parte del centro; ed affinchè siano *conjugati* devono essere paralleli ad un certo sistema di corde supplimentarie (§ 150).

Ora, non vi sono che le corde AC, BC, che abbiano la proprietà di fare angoli eguali con AB. Da qualunque altro sistema AM, BM, risulta sensibilmente AM>BM, onde ang. MBA>MAB.

Dal calcolo siamo condotti alli stessi risultati; in fatti, si trova (§ 170)

$$A'^2 = \frac{A^2B^2}{A^2\text{sen}^2\alpha + B^2\cos^2\alpha}, \text{ e } B'^2 = \frac{A^2B^2}{A^2\text{sen}^2\alpha' + B^2\cos^2\alpha'}.$$

Vediamo cosa risulti dall' eguagliare questi valori fra loro. Ne dedurremo prima l' eguaglianza

$$A^2\text{sen}^2\alpha + B^2\cos^2\alpha = A^2\text{sen}^2\alpha' + B^2\cos^2\alpha',$$

e sostituendo a $\cos^2\alpha$, $\cos^2\alpha'$ i loro valori $1-\text{sen}^2\alpha$, $1-\text{sen}^2\alpha'$,

$$(A^2-B^2)\text{sen}^2\alpha + B^2 = (A^2-B^2)\text{sen}^2\alpha' + B^2;$$

o, riducendo, $(A^2-B^2)(\text{sen}^2\alpha' - \text{sen}^2\alpha) = o$ ...(1)

D' onde raccogliesi che, fino a tanto che la curve è un' ellisse propriamente detta, A^2-B^2 diversifica dallo o, e che perciò la condizione si riduce a

$$\text{sen}^2\alpha' - \text{sen}^2\alpha = o, \text{ onde } \text{sen}\,\alpha' = \pm\,\text{sen}\,\alpha.$$

Da questa nuova relazione, e dall' equazione

$\tan\alpha \tan\alpha' = -\frac{B^2}{A^2}$, che fa vedere che le due tangenti devono avere segni contrarj, si deduce

$$\cos\alpha' = \mp\cos\alpha;$$

dunque, dividendo queste eguaglianze membro con membro,

$$\text{tang}\ \alpha' = -\ \text{tang}\ \alpha\,;$$

e ciò prova già, che due diametri conjugati non possono essere eguali che fino a che formano con l' asse delle x angoli tali che siano *supplementi l' uno dell' altro.*

Questo valore di tang α' sostituito nella

$$\text{tang}\ \alpha.\ \text{tang}\ \alpha' = -\frac{B^2}{A^2},\ \text{ci dà tang}^2\alpha = \frac{B^2}{A^2};$$

$$\text{onde tang}\ \alpha = \pm\frac{B}{A}.$$

(Se il segno superiore corrisponde a tang α, corrisponderà l' inferione ad α').

Si scorge da ciò che i diametri conjugati eguali formano, con l' asse delle x, angoli le di cui tangenti sono respettivamente espresse da

$+\frac{B}{A}$ e $-\frac{B}{A}$. Perciò questi diametri sono paralleli

alle corde AC, e BC.

Se l' ellissse diviene un cerchio, nel qual caso $A^2 - B^2 = o$, l' equazione (1) resta addempita, qualunque siano α ed α'; cioè tutti i diametri conjugati sono eguali nel cerchio, il che è evidente,

180. In qualunque iperbole, non possono esistere diametri conjugati *eguali*; poichè, attesa la relazione $A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2$,
se si supponga $A' = B'$, ne sisulta $A = B$; e, reciprocamente, da $A = B$, si ottiene $A' = B'$. Siegue da ciò che l' iperbole *equilatera* è la sola che possa avere *i diametri conjugati eguali*, e tutti i sistemi dei diametri conjugati di questa iperbole sono sistemi di diametri eguali.

Perciò l' equazione $y^2 - x^2 = -k^2$, nel caso an-

cora in cui la curva venga riferita ad assi obliqui, pure rappresenta un' iperbole *equilatera*.

181. Ravviciniamo le diverse relazioni che abbiamo ottenute fra le grandezze e le direzioni degli assi e dei diametri conjugati. Le principali fra queste relazioni sono in numero di quattro; cioè

$$A'^2+B'^2=A^2+B^2\ ,\ A'B'\mathrm{sen}\beta=AB\ ,$$

$$\mathrm{tang}\alpha'\mathrm{tang}\alpha=-\frac{B^2}{A^2}\ ,\quad \beta=\alpha'-\alpha\ ,\quad \text{per l' ellisse}$$

$$A'^2-B'^2=A^2-B^2\ ,\ A'B'\mathrm{sen}\beta=AB$$

$$\mathrm{tan}\alpha'\mathrm{tang}\,\alpha=\frac{B^2}{A^2}\ ,\ \beta=\alpha'-\alpha\ ,\ \text{per l' iperbole.}$$

Queste equazioni includendo sette quantità A, B, A', B', α, α', β, potremmo proporci per quesito generale: date *tre* di queste sette quantità, determinare le altre *quattro*.

Ci limiteremo invece a risolvere i due seguenti.

I. Cogniti gli assi di un' ellisse e l' ang. α *di due diametri conjugati, determinare di questi la grandezza e direzione.*

Per determinare A' e B', avremo prima le due relazioni

$$A'^2+B'^2=A^2+B^2\ ,\quad 2A'B'=\frac{2AB}{\mathrm{sen}\,\beta}\qquad \text{perciò}$$

$$(A'+B')^2=A^2+B^2+\frac{2AB}{\mathrm{sen}\beta},(A'-B')^2=A^2+B^2-\frac{2AB}{\mathrm{sen}\beta}$$

onde

$$A'=\frac{1}{2}\sqrt{(A^2+B^2+\frac{2AB}{\mathrm{sen}\beta})}+\frac{1}{2}\sqrt{(A^2+B^2-\frac{2AB}{\mathrm{sen}\beta})}\ ,$$

$$B'=\frac{1}{2}\sqrt{(A^2+B^2+\frac{2AB}{\mathrm{sen}\beta})}-\frac{1}{2}\sqrt{(A^2+B^2-\frac{2AB}{\mathrm{sen}\beta})}.$$

In quanto al valore di α, l' equazione $A^2 \tan\alpha \tan\alpha' + B^2 = o$, diviene, colla sostituzione di $\beta+\alpha$ in luogo di α'.

$$A^2 \tan\alpha \tan(\beta+\alpha) + B^2 = o.$$

o, sviluppando tang ($\beta+\alpha$), e togliendo il denominatore, e poi ordinando,

$A^2 \tan^2\alpha \pm (A^2 - B^2) \tan\beta . \tan\alpha \pm B^2 = o$; dunque

$$\tan\alpha = -\frac{(A^2-B^2)\tan\beta}{2A^2} \pm \frac{1}{2A^2} \sqrt{[(A^2-B^2)^2 \tan^2\beta - 4A^2B^2]}.$$

Questo valore per esser reale esige che $\tan^2\beta$ sia maggiore, o almeno eguale a $\frac{4A^2B^2}{(A^2-B^2)^2}$; cioè che l' angolo β, se è acuto, sia almeno eguale a quello che ha per tangente $\frac{2AB}{A^2-B^2}$, e se è ottuso, che sia al più eguale a quello che ha per tangente $\frac{-2AB}{A^2-B^2}$.

Supponiamo $\tan^2\beta = \frac{4A^2B^2}{(A^2-B^2)^2}$,

onde $\tan\beta = \pm \frac{2AB}{A^2-B^2}$

e portiamo questo valore nell' espressione di tang α; si riduce essa a

$$\tan\beta = -\frac{A^2-B^2}{2A^2} \times \pm \frac{2AB}{A^2-B^2} = \mp \frac{B}{A};$$

ciò che ci dà, attesa la relazione $\tan\alpha \tan\alpha' = -\frac{B^2}{A^2}$,

$$\text{tang}\,\alpha = -\frac{B}{A}, \quad \text{tang}\,\alpha' = \frac{B}{A}.$$

Questo risultato si accorda con quanto si disse n.° 150 ove si conobbe che i due diametri paralleli alle corde AC, BC (fig. 100) formano fra loro il maggiore ed il minor angolo possibile, secondo che si riguarda l' ang. IOL, o il suo supplemento IOL'.

La realtà dei valori di A' e di B' corrisponde alle medesime circostanze; poichè ponendo

$$A^2+B^2-\frac{2AB}{\text{sen}\beta}=o, \text{ si trova sen } \beta=\frac{2AB}{A^2+B^2}$$

$$\text{onde cos } \beta=\sqrt{\left(1-\frac{4A^2B^2}{(A^2+B^2)^2}\right)}=\pm\frac{(A^2-B^2)}{A^2+B^2},$$

$$\text{e perciò} \quad \text{tang } \beta=\pm\frac{2AB}{A^2-B^2}.$$

La determinazione di A' e B' per mezzo delle equazioni $A'^2-B'^2=A^2B^2$, $A'B'=\frac{AB}{\text{sen}\beta}$ relative all' iperbole, non sarebbe egualmente facile; si giungerebbe, colla eliminazione di B', ad una equazione di quarto grado in A', risolubile come quelle di secondo grado.

192. Secondo quesito. *Dati due diametri conjugati di un' ellisse, e l'angolo che fanno fra loro, determinare gli assi riguardo alla grandezza e direzione.*

Dalle equazioni

$$A^2+B^2=A'^2+B'^2, \quad 2AB=2A'B'\text{sen}\beta$$

abbiamo

$$\begin{cases} (A+B)^2=A'^2+B'^2+2A'B'\text{sen}\beta, \\ (A-B)^2=A'^2+B'^2-2A'B'\text{sen}\beta, \end{cases}$$

onde $A = \frac{1}{2}\sqrt{(A'^2 + B'^2 + 2A'B' \text{ sen } \beta)}$
$+ \frac{1}{2}\sqrt{(A'^2 + B'^2 - 2A'B' \text{ sen } \beta)}$
$B = \frac{1}{2}\sqrt{(A'^2 + B'^2 + 2A'B' \text{ sen } \beta)}$
$- \frac{1}{2}\sqrt{(A'^2 + B'^2 - 2A'B' \text{ sen } \beta)}$

Questi valori sono sempre reali, poichè da $(A'-B')^2 > 0$, si deduce $A'^2+B'^2 > 2A'B'$, e *molto più*, $A'^2+B'^2 > 2A'B' \text{ sen } \beta$

In quanto all' angolo α, potrebbe determinarsi mediante l' equazione

$\text{tang } \alpha \text{ tang } (\beta+\alpha) = -\frac{B^2}{A^2}$, poichè basterebbe sostituire poi ad A^2, B^2 i loro valori, ciò che ci condurrebbe a risultati molto complicati. Ma quest' angolo è già stato calcolato con maggior semplicità (§ 178), essendosi trovato

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{B'^2 \text{sen } 2\beta}{A'^2 + B'^2 \cos 2\beta}$$

183. Consideriamo adesso le equazioni dell' ellisse e dell' iperbole, riferita ad un sistema di diametri conjugati, cioè:

$$A'^2y^2 + B'^2x^2 = A'^2B'^2, \; A'^2y^2 - B'^2x^2 = -A'^2B'^2,$$

e vediamo quali conseguenze possano dedursene.

Siccome queste equazioni sono del tutto le stesse prescindendo dagli accenti, per A, B, come quelle di queste curve riferite ai loro assi, si concepisce che molte proprietà, stabilite in principio di questo capitolo, devono qui riprodursi, riguardo ai diametri conjugati. Osserviamo inoltre che, per passare dall' ellisse all' iperbole, basta ancora di cangiare B'^2 in $-B'^2$ nell' equazione della prima curva.

Ciò posto, siano OB, OC (fig. 113) due semidiametri conjugati di grandezza e direzione data, nell' ellisse che supponiamo riferita a questi diametri come assi.

Si deduce dall' equazione $A'^2y^2+B'^2x^2=A'^2B'^2$

$$\frac{y^2}{A'^2-x^2}=\frac{B'^2}{A'^2};$$ ovvero, siccome

$PM=y, OP=x, OB=A'$, onde $AP=A'+x, PB=A'-x$,

$$\frac{PM^2}{AP\times PB}=\frac{B'^2}{A'^2}$$

Dunque *il quadrato di un'ordinata, parallela ad uno dei diametri conjugati, sta al rettangolo delle distanze delle estremità dell' altro diametro dal piede dell' ordinata, in un rapporto costante*. Questa proprietà è analoga a quella del n.° 145

184. La connessione che esiste fra l' ordinata e l' ascissa di un qualunque punto della curva essendo la stessa tanto se si suppongono i due diametri conjugati che facciano fra loro un' angolo retto, quanto se si supponga che facciano un qualunque angolo, possiamo dedurne il seguente mezzo di *costruire l' ellisse, conoscendo la grandezza e direzione di un sistema di diametri conjugati.*

Siano OB, OC i semidiametri dati. *Nel punto* O *s' innalzi* OC′ *perpendicolare ad* OB *ed eguale ad* OC; *poi sulle due linee* OB, OC′, *considerate come i semiassi di un' ellisse, si descriva la curva* AC′BD′A, *con uno dei mezzi noti. S' innalzino dai punti* P, P′, ... *delle ordinate* PN, P′N′, ... *a questa curva*; *e condotte poi le rette* PM, P′M′, ... *parallele ad* OC, *e respettivamente eguali a* PN, P′N′, ...; i punti M, M′, ... apparterranno alla curva cercata che sarà allora rappresentata da ACBDA.

Infatti, è evidente che, per le stesse ascisse, le ordinate delle due curve sono eguali.

I risultati precedenti sono, in tutti i punti, applicabili all' iperbole (vedasi il n.° 256 per questo stesso quesito).

185. La risoluzione del problema delle tangenti

con il metodo del n.° 153 per un' ellisse riferita ad un sistema di diametri conjugati, ci condurrebbe, nel caso in cui fosse dato il punto di contatto (x'', y'') (fig. 112), all' equazione

$$y-y''=-\frac{B'^2x''}{A'^2y''}(x-x''),$$

nella quale $a=-\frac{B'^2x''}{A'^2y''}$ non esprimerebbe più una tangente trigonometrica, ma bensì (§ 9) *il rapporto dei seni degli angoli che forma la tangente* MR *con i due diametri conjugati* OB, OC.

Questa equazione, mediante la relazione

$$A'^2y''^2+B'^2x''^2=A'^2B'^2,$$

si riduce alla forma $\quad A'^2yy''+B'^2xx''=A'^2B'^2.$

Facciamo in questa equazione $y=o$; ne risulta $x=\frac{A'^2}{x''}$; e questo è il valore dall' ascissa OR del punto ove la tangente incontra l' asse delle x; e se da questa distanza si sottragga x'' o OP, si otterrà per il valore della sottotangente PR,

$$PR=\frac{A'^2-x''^2}{x''}.$$

Si ottiene il medesimo risultato, ponendo $y=o$, nella equazione non semplificata della tangente, e cercando il valore corrispondente di $x-x''$ (ved. § 155).

Risulta infatti, per $y=o$, $x-x''=\frac{A'^2y''^2}{B'^2x''}$,

o attesa la relazione

$$A'^2y''^2=B'^2(A'^2-x''^2),\ x-x''=\frac{A'^2-x''^2}{x''}$$

Questo risultato è analogo a quello che è stato ottenuto (§ 155) per la sottotangente dell' ellisse riferita ai suoi assi principali.

In quanto all' equazione della normale ed all' espressione della sottonormale, risulterebbero più complicate di quelle del n.° 156, poichè converrebbe tenere a calcolo la condizione della perpendicolarità di due rette, nell' ipotesi di assi obliqui.

186. Potremo adesso essere al caso di generalizzare la proposizione del n.° 159.

Sia LL' (fig. 112) una retta condotta ad arbitrio nel piano di un' ellisse.

Proponiamoci di condurre per i diversi punti A', A'', ... di questa retta, delle tangenti alla curva.

A tale oggetto supporremo la curva riferita ad un sistema di diametri conjugati OX, OY, uno dei quali sia parallelo alla retta data, ciò che è sempre possibile. Rappresentiamo con (x', y') le coordinate del punto H', e con (x'', y'') quelle del punto di contatto di una delle tangenti condotte da questo punto.

L' equazione di questa tangente avrà la forma.

$$y-y'=a\,(x-x'),\ \text{avendo } a \text{ per valore} -\frac{B'^2x''}{A'^2y''}$$

Ora, per determinare x'', y'', abbiamo le

$$A'^2\,y'\,y''+B'^2\,x'\,x''=A'^2\,B'^2\ \ldots\ldots(1),$$

$$A'^2\,y''+B'^2\,x''^2=A'^2\,B'^2\ \ldots,\ (2)$$

Ma invece di effettuare l' eliminazione di x'', y'' fra queste equazioni, possono costruirsi i luoghi geometrici che esse rappresentano (ved. § 159).

La seconda altro non è che l' ellisse già delineata.

In quanto all' equazione (1) che rappresenta una linea retta, facciamo successivamente

$$\left.\begin{array}{l} y'' = o \\ x'' = o \end{array}\right) \text{ e otterremo } \begin{array}{l} x'' = \dfrac{A'^2}{x'} \\ y'' = \dfrac{B'^2}{y'} \end{array}$$

Questi due risultati essendo costruiti e portati rispettivamente da O in P, e da O in G, determineranno una retta PG, le di cui intersecazioni M', m' con la curva saranno i punti di contatto delle due tangenti che possono condursi dal punto H'.

Ciò posto, siccome il valore $x'' = \dfrac{A'^2}{x'}$, corrispondente ad $y'' = o$ è indipendente dall' ordinata y' del punto H', possiamo concludere che se, per un secondo punto H'' della retta LL', si conduchino due tangenti H''M'' ed H''m'', la retta di congiunzione M''m'' passerà necessariamente per lo stesso punto P della retta OX.

In generale, *se dai diversi punti di una retta* LL' *delineata ad arbitrio sul piano di un' ellisse (o di un' iperbole), si conduchino delle tangenti a questa curva, e si uniscano successivamente i punti di contatto relativi a ciascuna coppia di tangenti, tutte le rette di congiunzione hanno la proprietà di concorrere in uno stesso punto che si trova situato sul diametro conjugato del diametro parallelo alla retta data.*

Quando la retta sia esteriore alla curva, il punto di concorso è *interiore*, e reciprocamente. Ciò risulta evidentemente dall' espressione $x'' = \dfrac{A'^2}{x'}$ che, per $x' > A'$, ci dà $x'' < A'$; e per $x' < A'$, $x'' > A$.

La proposizione reciproca è vera egualmente; ma per la dimostrazione ci riportiamo a quella già addotta, rapporto al cerchio (§ 185).

187. *Osservazione.* Se il punto della retta LL′, per il quale si conducono le due tangenti, è situato in R, cioè sul diametro OX, avendosi, per questo punto, $y=0$, la equazione (1) diviene

$$B'^2x'x''=A'^2B'^2 \text{ ; onde } x''=\frac{A'^2}{x'}.$$

Ad x' sostituito questo valore nella (2), se ne deducono per y'' due valori eguali e con segni contrarj.

Si conosce da ciò che *la retta che unisce i punti di contatto di due tangenti condotte da un qualunque punto, è divisa in due parti eguali dal diametro che passa per questo punto; ed è parallela al conjugato di tal diametro.*

188. Nell' ellisse, che vien sempre riferita a due diametri conjugati AB, CD (fig. 112), si conducano le due corde supplementarie AK, BK. Avremo, per le equazioni di queste rette riferite agli assi OX, OY,

$$y=m(x-A'),\ y=m'(x+A'),$$

(rappresentando m, m' in questo luogo *i rapporti dei seni*).

Chiamiamo x', y' le coordinate del punto K; le precedenti equazioni divengono per questo punto, $y'=m(x'-A')$, $y'=m'(x'+A')$, d' onde deducesi $m.m'=\dfrac{y'^2}{x'^2-A'^2}$.

Per altra parte, dalla relazione

$$A'^2y'^2+B'^2x'^2=A'^2B'^2$$ abbiamo

$$A'^2y'^2=-B'^2(x'^2-A'^2) \text{ ; cioè } -\frac{B'^2}{A'^2}=\frac{y'^2}{x'^2-A'^2}.$$

Dunque $$m.m'=-\frac{B'^2}{A'^2};$$

che è la stessa relazione ottenuta per le corde condotte dalle estremità dell' asse maggiore.

Per l' iperbole si troverebbe, $m.m' = \frac{B'^2}{A'^2}$.

189. *Prima conseguenza.* Dal condurre una qualunque tangente MR, ed il diametro OM che passi per il punto di contatto, si è trovato (§ 185) per il coefficiento di x nell' equazione della tangente,

$$a = -\frac{B'^2 x''}{A'^2 y''}$$

Altronde, essendo $y = a'x$ l' equazione del diametro, poichè questo passa per il punto x'', y''; ne risulta $y'' = a'x''$, cioè $a' = \frac{y''}{x''}$;

avremo dunque $\quad a.a' = -\frac{B'^2}{A'^2}$;

relazione che, paragonata con la precedente

$$m.m' = -\frac{B'^2}{A'^2}, \text{ci dà} \quad a.a' = m.m'.$$

Dunque, supponendo AK parallela ad OM, nel qual caso $m' = a'$, ne risulta $a = m$; cioè MR è parallela a BK.

Perciò, per *condurre una tangente* in un punto dato di un ellisse, della quale non ci è cognita che la posizione di un diametro AB, *basta unire il centro con il punto M, e tirare la corda AK parallela ad OM, e poi condurre MR parallela alla seconda corda supplementaria BK.*

Questo mezzo ha il vantaggio di non supporre cogniti per posizione, nè gli assi nè i fochi della curva.

Seconda conseguenza. Sia ON il diametro conjugato del diametro OM che passa per il punto di contatto della tangente MR. Poichè come abbiamo

ora veduto, la corda AK essendo parallela ad OM, la seconda corda BK è parallela alla tangente, e si sà altronde (§ 162) essere questa tangente parallela al diametro ON, ne siegue necessariamente, che il diametro ON sia anch' esso parallelo alla corda supplementaria BK.

Possiamo da ciò concludere che *due diametri respettivamente paralleli a due corde supplementarie, che partono dalle estremità di un qualunque diametro, formano un sistema di diametri conjugati.*

E con ciò viene ad esser generalizzata la proposizione del n.° 150.

Questa proprietà e la precedente competono alla iperbole.

190. È da ciò che siamo abilitati a fissare sull' ellisse o sull' iperbole la posizione di *un sistema di diametri conjugati facenti fra loro un' angolo dato*. Basterà *descrivere sopra un qualunque diametro* AB *un segmento di cerchio capace dell'angolo dato*; questo segmento, che passerà in prima per i punti A e B, taglierà la curva in un' altro punto K tale che, tirando le corde AK, BK, e guidando poi dal centro le OM, ON parallele a queste corde, verremo ad ottenere i due richiesti diametri.

La costruzione medesima si applica all' iperbole.

N. B. Osserveremo tuttavia che, per l' ellisse, questa costruzione non si rende sempre possibile, attesochè gli angoli, formati dalle corde che si appoggiano sopra un diametro, hanno limiti determinati.

Infatti, abbiam veduto (§ 151) che gli angoli dei diametri conjugati di un' ellisse hanno per *massimo* l' angolo ottuso corrispondente alle due corde supplementarie che congiungono le estremità dell'asse maggiore con una dell' estremità dell' asse minore, e per *minimo* il supplemento di quest' angolo; ma, atteso il numero precedente, qualunque angolo iscrit-

to ed appoggiato sopra un diametro è sempre eguale a quello di un certo sistema di diametri conjugati; dunque questi angoli hanno lo stesso *massimo* e lo stesso *minimo* addotto di sopra.

Perciò, prima di effettuare la precedente costruzione, converrebbe accertarsi se l'angolo dato si trovi fra i limiti che abbiamo ora assegnati.

191. Ultimeremo questa teoria con il quesito che siegue.

Delineata un ellisse o un' iperbole sopra un piano, determinarne il centro e gli assi principali riguardo alla grandezza e direzione.

Sia una curva LHL'H' (fig. 113) che si sa essere un' ellisse di cui non se ne conosce alcun' elemento.

Primieramente, per trovarne il centro, *tireremo due corde qualunque* mm', nn' *parallele fra loro congiungendo i punti medj di queste due corde con una retta* HH', che, da quanto è stato detto (§ 132) sarà un diametro. *Prendendo poi il mezzo di questo diametro*, avremo il centro richiesto (§ 100).

Ora, per ottenere gli assi, si potrebbe, *dopo aver delineato un qualunque diametro* LL', *descrivere* (§ 190) *una semi-circonferenza e congiungere i punti* L, L' *con il punto* K *ove questa semicirconferenza incontra la curva, poi finalmente condurre per il punto* O *i due diametri* AB, CD *paralleli ad* LK, L'K.

Ma l'operazione si renderà più semplice col *descrivere dal punto* O, *come centro, con il raggio* OL' *un' arco di cerchio che tagli l' ellisse nel punto* K; *e poi col dividere quest' arco in due parti eguali nel punto* I: la retta di congiunzione OI rappresenta la direzione di uno degli assi.

Poichè, dalla costruzione, risultano eguali i semi-diametri OL', OK; è da ciò che si esige che faccino angoli eguali tanto con il primo che con il secondo asse.

§. III. *Dell' Iperbole riferita a suoi assintoti.*

197. Da quanto si è esposto fin qui sull' ellisse e sull' iperbole, rilevasi che tutte le proprietà della prima curva esistono egualmente nella seconda con alcune sole modificazioni riguardo a talune; non si verifica però la reciprocità, vale a dire che l' iperbole ha molte proprietà che non possono appartenere all' ellisse. Tali sono le proprietà relative agli assintoti. Per completare coll' unione di queste, ci proporremo di *ricercare l'equazione dell' iperbole riferita a' suoi assintoti* come assi coordinati

Nell' equazione dell' iperbole riferita ai suoi assi

$$A^2 y^2 - B^2 x^2 = - A^2 B^2 \ldots (1);$$

sostituiremo ad x ed y i valori

$$x = x \cos \alpha + y \cos \alpha'$$
$$y = x \operatorname{sen} \alpha + y \operatorname{sen} \alpha',$$

adattati a far passare la curva da un sistema rettangolare ad un sistema obliquo (§ 99); ed otterremo

$$\left.\begin{array}{r}(A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha' - B^2 \cos^2 \alpha')\, y^2 \\ +(2A^2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\alpha' - 2B^2 \cos\alpha \cos\alpha')\, xy \\ +(A^2 \operatorname{sen}^2\alpha - B^2\cos^2\alpha)\, x^2\end{array}\right\} = -A^2 B^2 \ldots (2)$$

Ciò posto, prendiamo, per nuovo asse delle x, l' assintoto OK (fig. 114), situato sotto il primo asse, e per nuovo asse delle y, l' assintoto OL; gli angoli α, α' hanno allora un valore determinato (§ 108) dalle equazioni

$$\operatorname{tang} \alpha = -\frac{B}{A}, \quad \operatorname{tang} \alpha' = \frac{B}{A};$$

d' onde si deduce

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2)}}, \ \text{sen}\,\alpha = -\frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$$

$$\cos\alpha' = \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2)}}, \ \text{sen}\,\alpha' = \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$$

e perciò $A^2\text{sen}^2\alpha' - B^2\cos^2\alpha' = \dfrac{A^2B^2 - A^2B^2}{A^2+B^2} = o$

$$A^2\text{sen}^2\alpha - B^2\cos^2\alpha = \frac{A^2B^2 - A^2B^2}{A^2+B^2} = o,$$

$$2A^2\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\alpha' - 2B^2\cos\alpha\cos\alpha' = -\frac{4A^2B^2}{A^2+B^2},$$

Si sgorge da ciò che i termini in y^2 ed in x^2 *svaniscono* in forza di questa trasformazione; e se si pone nella equazione (2) il valore del coefficiente di xy, si ottiene, a riduzione effettuata

$$x = \frac{A^2+B^2}{4} \ldots. (3),$$

Questa equazione che non racchiude che il rettangolo delle variabili, ed una quantità del tutto cognita, è la forma caratteristica dell' equazione di qualunque iperbole riferita ai suoi assintoti riguardati come assi coordinati.

In fatti, supponiamo che si voglia, reciprocamente, determinare α, α' dell' equazione (2), così che svaniscano i termini in x^2 ed in y^2.

Conviene allora fissare le relazioni

$$A^2\text{sen}^2\alpha' - B^2\cos^2\alpha' = o, \ A^2\text{sen}^2\alpha - B^2\cos^2\alpha = o$$

Ora, abbiamo dalla prima

$$A^2\text{tang}^2\alpha' - B^2 = o, \ \text{onde tang}\,\alpha' = \pm\frac{B}{A};$$

anche la seconda ci dà $\tang \alpha = \pm\frac{B}{A}$.

Conosciamo da ciò che, prendendo per α' l'angolo che ha per tangente $+\frac{B}{A}$ convien prendere per α quello che ha per tangente $-\frac{B}{A}$. Dunque i nuovi assi, riguardo ai quali l'equazione vien ridotta alla forma $xy = k^2$, sono gli assintoti della curva.

Da questa equazione, che ci dà

$y = \frac{k^2}{x}$, o $x = \frac{k^2}{y}$, vien a rendersi sensibile, che più aumenta x, e più diminuisce y; e che, dal supporre x maggiore di qualunque grandezza assegnata, diviene y minore di qualunque grandezza data; e reciprocamente.

Perciò i nuovi assi hanno la proprietà caratteristica degli assintoti (§ 108)

193. Facciamo, per maggior semplicità,

$$\frac{A^2+B^2}{4} = k^2;$$

l'equazione (3) diverrà $xy = k^2$.

Chiamando β l'ang. LOK dei due assintoti (fig. 114), e moltiplicando i due membri di questa equazione per sen β, si ottiene

$$xy \operatorname{sen} \beta = k^2 \times \operatorname{sen} \beta.$$

Ciò posto siano M un qualunque punto della curva, MQ, MP le coordinate di questo punto parallele agli assintoti; viene con ciò a formarsi un parallelogrammo OPMQ, che ha per misura della sua superficie, $OP \times MH = xy \operatorname{sen} \beta$.

Ma questa espressione è eguale a k^2 sen β, *quantità costante* e indipendenle dalla posizione del punto M.

Dunque *tutti i parallelogrammi*, *costruiti sopra coordinate parallele agli assintoti*, *sono equivalenti fra loro*.

N. B. Si scorge facilmente che questa superficie costante è eguale alla metà del rettangolo O B E C costruito sopra i semiassi,

Infatti, l'ang. β dei due assintoti essendo duplo dell' ang. LOX, abbiamo

$$\text{sen } \beta = \text{sen } 2\,\alpha' = 2 \text{ sen } \alpha' \cos \alpha';$$

ma si è trovato (§ 192)

$$\cos \alpha' = \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2)}}, \text{ sen } \alpha' = \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2)}};$$

onde sen $\beta = \frac{2AB}{A^2+B^2}$ ed $\frac{A^2+B^2}{4} \times \text{sen } \beta = \frac{AB}{2}$.

Osserveremo ancora che, dal congiungere i punti A, B con i punti C, D, estremitá del secondo asse, la figura così formata è un *rombo* i di cui lati sono paralleli agli assintoti ed è quadruplo del rombo OIBI' costruito sulle coordinate del punto B.

Ora, il primo è un composto di quattro triangoli BOC, COA, AOD, DOB, metà rispettive dei quattro rettangoli OBEC, OAeC, OAèD, OBE'D; il che prova, in altra guisa, che il rombo maggiore è la metà del rettangolo costruito sopra gli assi, o che il rombo minore è la metà del rettangolo costruito sopra i semi assi.

La figura ADBC, che ha per espressione (A^2+B^2) sen β, o 2AB, chiamasi, senza sapersene il perchè, la *potenza* dell' iperbole. Nel caso dell' iperbole equilatera, questa potenza si riduce a $2A^2$, ed il rombo diviene un quadrato che ha per lato $A\sqrt{2}$.

194. Proponiamoci adesso di condurre una tangente in un punto dato M (fig. 115) dell' iperbole, impiegando il metodo del n.° 68.

Siano (x'', y'') le coordinate del punto M, (x', y') quelle di un secondo punto della curva.

L' equazione dell' iperbole essendo $xy = k^2$ .... (1), la secante verrà rappresentata dal sistema di tre equazioni

$$y - y'' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'') \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$x'y' = k^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

$$x''y'' = k^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Per ottenere il valore del coefficiente $\frac{y'-y''}{x'-x''}$, si sottragga dalla (3) la (4), ed avremo $x'y' - x''y'' = 0$, equazione che coll' introdurre i due termini $-x'y''$, $+y''x'$ che si distruggono, si cangia in

$$x'(y' - y'') + y''(x' - x'') = 0;$$

onde

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{y''}{x'}$$

Dunque la secante ancora verrà rappresentata dalle equazioni

$$y - y'' = -\frac{y''}{x'}(x - x''), \text{ ed } x''y'' = k^2.$$

Ma se si volesse che questa retta divenisse tangente converrebbe supporre $x' = x''$, ed $y' = y''$, ciò che ci dà

$$y - y'' = -\frac{y''}{x''}(x - x''), \; x''y'' = k^2;$$

la prima delle quali equazioni è quella della tangente richiesta, qualora si supponga che la seconda resti adempita.

195. *Osservazione*. Per passare dalla secante alla tangente, basta introdurre la condizione $x'=x''$, perchè y' non ha luogo nelle due equazioni della secante. Ed, infatti, risulta dall' equazioni della curva, $xy=k^2$, che non ci dà che un solo valore di y corrispondente ad un valore unico di x, e reciprocamente, che la condizione $x'=x''$ includa necessariamente $y'=y''$. Non accade però lo stesso quando la curva si riferisca ai suoi assi o ad un sistema di diametri conjugati, perchè, allo stesso valore di x, corrispondono sempre due valori di y, e perciò dovremo, il tal caso, introdurre le due condizioni riunite.

Dall' applicare il metodo generale del n.° 66, cioè dal combinare fra loro le due equazioni

$$xy=k^2\text{, ed } y-y'=a(x-x'),$$

per formare o un' equazione soltanto in x o un' equazione in y, si troverebbe, dalla condizione che esprime essere eguali i due valori di x o quelli i-y, l' unica relazione $(y'-a x')^2+4ak^2=o$, senza alcuna estranea risoluzione (§ 67); e ciò si spiega coll' osservare che i due valori di x non potrebbero essere eguali senza che lo fossero quelli di y nel tempo stesso, e reciprocamente.

196. Vediamo quali conseguenze possan dedursi dall' equazione della tangente,

$$y-y''=-\frac{y''}{x''}(x-x'').$$

Da quest' equazione, facendo $y=o$, risulta

$$x-x''=\frac{x''y''}{y''}=x''.$$

Ma questo valore di $x-x''$ è eguale alla distanza OR (fig. 115) diminuita dell' ascissa OP, cioè, alla sottotangente PR; e perciò PR = OP. Dunque, attesi i triangoli simili OTR, PMR, abbiamo MR

= MT ; e quindi, *la porzione di una tangente compresa fra gli assintoti, è divisa in due parti eguali nel punto di contatto*; proprietà già dimostrata (§ 175).

Adesso, dai due triangoli OMP, PMR, avendosi

$$(\text{t.}^\circ 3.^\circ \S 130)\ \overline{OM}^2 = x''^2 + y''^2 + 2x''y''.\cos MPR,$$

$$\overline{MR}^2 = x''^2 + y''^2 - 2x''y''.\cos MPR;$$

si deduce $\overline{OM}^2 - \overline{MR}^2 = 4x''y''.\cos MPR = 4x''y''.\cos\beta$;

ma l'equazione $x''y'' = k^2 = \dfrac{A^2+B^2}{4}$

ci da $4x''y'' = A^2+B^2$; abbiamo, altronde,

$$\beta = 2\alpha,\ \text{cioè}\ \cos\beta = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha,$$

o, ponendo per $\cos^2\alpha$, $\text{sen}^2\alpha$, i loro valori trovati

n.° 192, $\cos\beta = \dfrac{A^2-B^2}{A^2+B^2}$.

Dunque l'espressione di $\overline{OM}^2 - \overline{MR}^2$ diviene

$$\overline{OM}^2 - \overline{MR}^2 = A^2 - B^2.$$

E siccome si è ottenuta (§ 187) la relazione $A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2$, avremo dunque

$$\overline{OM}^2 - \overline{MR}^2 = A'^2 - B'^2.$$

Supponendo perciò che OM sia il semidiametro A', potremo concludere che MR rappresenta il semidiametro B'; cioè che *la porzione di tangente*, TR, *rappresenta in grandezza il diametro conjugato* 2B' *di quello che passa per il punto di contatto*; ed è questa la seconda proprietà del n.° 175.

Di qui è che abbiamo, per proprietà immediata, che i *parallelogrammi iscritti all' iperbole, hanno i vertici situati sopra gli assintoti.*

Consideriamo ancora una qualunque secante all' iperbole, SS' (fig. 15), e rappresentiamo con (x', y') le coordinate del punto N, e con (x'', y'') quelle del punto N'.

Abbiam trovato (§ 194), per il sistema delle equazioni atte a rappresentare questa secante,

$$y-y''=-\frac{y''}{x'}(x-x''),\ x''y''=k^2.$$

Ora, facendo nella prima $y=0$, si ottiene

$$x-x''=\frac{y''x'}{y''}=x',\ \text{cioè}, OS'=OQ',\ \text{o}\ Q'S'=OQ;$$

e perciò, $Q'S'=Q''N$.

Si scorge da ciò che i due triangoli NQ'' S, N'Q'S' sono eguali, poichè sono *equiangoli* ed hanno *un lato eguale*.

Di qui è che NS = N'S'; ciò che dimostra che *le due parti di una secante, comprese fra la curva e gli assintoti, sono eguali fra loro* (§ 176).

Abbiamo creduto dover riassumere la discussione delle proprietà già stabilite, acciò si conoscesse qual vantaggio potesse risultare dalla combinazione della equazione $xy=k^2$ con quella della linea retta; non possiamo però non riconoscere che, le dimostrazioni date innallora, siano preferibili a queste.

197. L' ultima ci somministra un mezzo quanto semplice altrettanto spedito per costruire un' iperbole, qualora si conoscano *gli assintoti ed un sol punto della curva.*

Siano LL', KK' (fig. 116) i due assintoti, ed M il punto di posizione data sul loro piano.

Guidando da questo punto delle rette in tutte le direzioni possibili, e partendo dai punti s, s',

s'' . . . . *ove queste rette incontrano l' assintoto* KK', *si prenderanno le parti sm , s'm' s'' m''* , ... *eguali alle distanze* SM , S'M , S''M , ... *del punto* M *da quelli ove le stesse rette incontrano l' altro assintoto* ; i punti m , m' , m'' , ... , così determinati , appartengono alla curva.

Sarà opportuno di qui avvertire che da questa costruzione si ottengono insieme i punti dell' uno e dell' altro ramo ; attesochè la proposizione delle secanti è stata dimostrata , anche per una secante, come Mm'' o Mm'''.

Potremo , in tal' occasione , *determinare gli assi riguardo alla grandezza e direzione.*

Primieramente , avremo le direzioni dei due assi col dividere in due parti eguali l' ang. β dei due assintoti , com' anche il suo supplemento.

In oltre il punto M , di posizione cognita , avrà le coordinate x', y' , parallele agli assintoti , similmente cognite.

Avremo dunque la relazione $x'y' = k^2$, o

$$A^2 + B^2 = 4x'y' \quad . \ . \ . \ . \ (1);$$

ma abbiamo ancora (§ 108) $\text{tang}\ \frac{1}{2}\beta = \pm\frac{B}{A}$;

d' onde $$B^2 = A^2 \text{tang}^2 \frac{1}{2}\beta \quad . \ . \ . \ (2).$$

Combinando fra loro le (1) e (2) troveremo

$$A^2 \left(1 + \text{tang}^2 \frac{1}{2}\beta \right) = 4x'y' \text{; d' onde}$$

$$A^2 = \frac{4x'y'}{1+\text{tang}^2 \frac{1}{2}\beta} = 4x'y' \cos^2 \frac{1}{2}\beta;$$

e perciò, $A = 2 \cos \frac{1}{2} \beta \sqrt{x'y'}$,

$$B = A \tang \tfrac{1}{2} \beta = 2 \tang \tfrac{1}{2} \beta . \cos \tfrac{1}{2} \beta \sqrt{x'y'} = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \beta \sqrt{x'y'}.$$

§. IV. DELLA PARABOLA.

Proprietà di questa curva riferita ai suoi assi principali.

198. Incominciamo, come per l'ellisse ed iperbole, dall'indicare i caratteri analitici o geometrici che distinguono i punti presi sulla curva, da quelli situati fuori o dentro.

1.° Sia $y^2 = 2px$ l'equazione della parabola MAm. Riguardiamo i tre punti N, M, N' (fig. 117) situati sopra una stessa perpendicolare all'asse delle x, il primo de' quali trovasi fuori della curva, il secondo sulla curva, ed il terzo dentro.

Abbiamo NP>MP, ed N'P<MP; dunque, poichè, riguardo al punto M, $\overline{MP}^2 = 2p.AP$, o $y^2 - 2px = 0$, ne siegue che, per il punto esteriore N, debba aversi $y^2 - 2px > 0$, e per il punto interiore N', $y^2 - 2px < 0$.

N. B. Se il punto avesse la posizione esteriore N'', l'ascissa AP'' di questo punto sarebbe negativa, e si avrebbe con più ragione $y^2 - 2px > 0$.

2.° Seguendo la definizione della parabola (§ 111), ciascuno de' suoi punti M è ad egual distanza dal foco F e dalla direttrice LL'; ma riguardando due punti R ed R', uno fuori e l'altro dentro la curva, guidando per questi punti Q'RM', Q''M''R' parallele ad AX, poi dal congiungere il punto F con i punti R ed M', R' ed M'', avremo prima per il punto R, FR+RM'>FM', o M'Q'; dunque FR>RQ', cioè, *la distanza di un punto esteriore dal foco è maggiore della distanza dalla direttrice.*

*

Per il punto R', $FR' < FM'' + M''R'$ o $< Q''M'' + M''R'$; onde $FR' < Q''R'$; perciò *un punto interiore e meno distante dal foco che dalla direttrice.*

199. Dall'equazione $y^2 = px$, si deduce $\frac{y^2}{x} = 2p$; che ci fa conoscere che nella parabola *il quadrato di un' ordinata sta all' ascissa corrispondente in un rapporto costante*, chiamato il *parametro* della curva; o, con altra espressione, *i quadrati delle ordinate stanno fra loro come le ascisse corrispondenti*; o, *le ordinate crescono come le radici quadrate delle ascisse.*

Da quest' ultimo carattere viene a stabilirsi una differenza sensibile fra il corso della parabola e quello di ciascuno dei rami dell' iperbole. Infatti, poichè abbiamo per questa,

$$y = \pm\frac{B}{A} x \sqrt{\left(1 - \frac{A^2}{x^2}\right)},$$

ne risulta che i valori di y debbano crescere *quasi proporzionalmente alle ascisse*, per i valori di x un poco rilevanti. L' iperbole s' innalza dunque molto più rapidamente sopra l' asse delle x di quello faccia un ramo parabolico. Finalmente, quando x è grandissimo, il corso della iperbole è quasi quello di una linea retta che ha per equazione $y = \frac{B}{A} x$; mentre che il corso della parabola corrisponde molto più a quello di una linea retta parallela all' asse delle x.

L' equazione $y^2 = 2px$, dandoci, $2p : y :: y : x$, ci presenta il seguente mezzo di descrivere la parabola con punti.

Sopra il primo asse principale ed a sinistra dell' origine A (fig. 118) *si prenda una distanza* AC *eguale a* $2p$; *s' innalzino sopra* AX *dai di-*

versi punti P, P′, P″ . . . *delle perpendicolari*, *poi descritte con le rette* CP, CP′, CP″, ... *come diametri altre ttante circonferenze*; *si condurranno* finalmente *dai punti* Q, Q′, Q″, ... , *ove queste circonferenze incontrano il secondo asse*, *delle parallele al primo*; i punti M, M′, M″, ... determinati dall' incontro di queste parallele con le perpendicolari, sono i punti della richiesta parabola.

Infatti, da una qualunque ascissa AP, abbiamo CA : AQ :: AQ : AP, o $2p$: MP :: MP : AP; onde $\overline{MP}^2 = 2p$. AP.

I punti del ramo inferiore si determinano col prolungare le perpendicolari in parti eguali a loro stesse.

200. *Misura di un segmento parabolico.*

Per mantener l'ordine che osservato abbiamo nelle altre curve, proponiamoci di determinare l'area di un segmento compreso fra un' arco di parabola MAm, ed una corda Mm perpendicolare al primo asse, o semplicemente l' area del semi-segmento APM.

A tale oggetto, riguardiamo sull' arco AM (fig. 119) una serie di punti M, M′, M″, ... dai quali vengano guidate delle perpendicolari e delle parallele all' asse AX; queste rette ci daranno dei rettangoli RPP′M′, R″P′P″M″, ... che chiameremo *rettangoli interiori*, e degli altri rettangoli R′QQ′M′, R‴Q′Q″M″, ... che denomineremo *rettangoli esteriori*.

Rappresentando ora con x ed y, x' ed y', x'' ed y'', ... le coordinate dei diversi punti M, M′, M″, ... , avremo per la superficie s del rettangolo interiore RPP′M′, $s = y'\ (x - x')$, e per quella del rettangolo esteriore corrispondente t, $t = x'\ (y - y')$,

d' onde deducesi $\frac{s}{t} = \frac{y'(x-x')}{x'(y-y')}$.

Ma, i punti M, M', ... trovandosi sulla curva, avremo le relazioni

$$y^2 = 2px,\ y'^2 = 2px',$$ che ci danno

$$x' = \frac{y'^2}{2p},\ x - x' = \frac{y^2 - y'^2}{2p};$$

avremo dunque, a sostituzioni effettuate,

$$\frac{s}{t} = \frac{y'(y^2 - y'^2)}{y'^2(y-y')} = \frac{y+y'}{y'} = 1 + \frac{y}{y'}.$$

Per i due rettangoli successivi si otterrebbe

$$\frac{s'}{t'} = 1 + \frac{y'}{y''};$$ e così per gli altri.

Osserviamo adesso che i punti M, M', M'', ... , possono prendersi sulla curva in modo da aversi la serie dei rapporti eguali

$$\frac{y}{y'} = \frac{y'}{y''} = \frac{y''}{y'''} \ldots, = 1 + m,$$ essendo m una frazione costante così piccola quanto si vuò; (basta infatti prendere sopra AY delle parti

$$AQ' = AQ \times \frac{1}{1+m},\ AQ'' = AQ' \times \frac{1}{1+m}, \ldots \ldots$$

e poi di condurre per i punti Q', Q'', ... delle parallele ad AX).

Mediante tal condizione, i rapporti $\frac{s}{t}, \frac{s'}{t'}, \ldots.$

divengono $\frac{s}{t} = 2 + m, \frac{s'}{t'} = 2+m, \frac{s''}{t''} = 2+m, \ldots$

onde, per il principio cognito (t° 1.° §120)

$$\frac{s+s'+s''+\ldots\ldots}{t+t'+t''+\ldots\ldots}, \text{ o } \frac{S}{T}=2+m;$$

ciò che già ci dimostra che *il rapporto fra la somma dei rettangoli interiori, e quella dei rettangoli esteriori, è eguale alla quantità costante* $2+m$.

Ciò posto, siccome è evidente che, prendendo per m una frazione piccolissima, la somma dei rettangoli interiori differirà pochissimo dal semisegmento AMP; e che la somma dei rettangoli esteriori differirà pochissimo anch' essa dalla figura mistilinea AMQ; e che queste differenze saranno altrettanto più piccole quanto sarà minore il valore della frazione rappresentata da m; potremo concludere che al limite, cioè, quando si supporrà $m=o$, le due somme dei rettangoli si confonderanno con le superficie AMP, AMQ, e che si otterrà necessariamente

$$\frac{\text{AMP}}{\text{AMQ}}=2;\ \text{onde AMP}=2\ \text{AMQ};\ \text{e così}$$

$$\text{APMQ}=3\ \text{AMQ};\ \text{e perciò}$$

$$\text{AMQ}=\tfrac{1}{3}\ \text{APMQ, o AMP}=\tfrac{2}{3}\ \text{APMQ}=\tfrac{2}{3}\ x.y.$$

Dunque finalmente, *la superficie del semisegmento parabolico* AMP *è eguale ai due terzi del rettangolo costruito sopra le coordinate estreme.*

Risulta da ciò, che il segmento parabolico è una superficie *quadrabile*, ciò che non ha luogo nè per il cerchio nè per l' ellisse, le di cui aree dipendono dal rapporto della circonferenza al diametro.

Problema delle Tangenti.

201. Proponiamoci adesso di condurre una tangente alla parabola per un punto (x'', y'') dato sulla curva.

Una retta condotta per questo punto e per un secondo punto (x' , y') della curva , è rappresentata dal sistema di tre equazioni ,

$$y-y''=\frac{y'-y''}{x'-x''}\,(x-x'')\;\ldots\ldots\;(1),$$

$$y'^2=2px'\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(2),$$
$$y''^2=2px''\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(3).$$

Per ottenere il valore di $\frac{y'-y''}{x'-x''}$, si sottragga la (3) dalla (2); e si avrà

$$(y'+y'')(y'-y'')=2p(x'-x'');\text{onde}\frac{y'-y''}{x'-x''}=\frac{2p}{y'+y''}$$

Perciò , la secante vien' ancora espressa dalle due equazioni $y-y''=\frac{2p}{y'+y''},(x-x'')$, ed $y''^2=2px''$.

Ma affinchè questa retta divenga tangente, bisogna che sia unitamente $y'=y''$, $x'=x''$, ciò che ci dà $\quad y-y''=\frac{p}{y''}(\,x-x''\,)$, $y''^2=2px''$;

La prima delle quali è l' equazione della tangente , quando si supponga che la seconda resti adempita.

202. *Osservazione*. Dall' essere l' equazione

$$y-y''=\frac{2p}{y'+y''}\,(\,x-x''\,)\text{ indipendente da }x',$$

ne siegue che l' ipotesi $y'=y''$ basti per fissare il contatto della retta. Ciò proviene , attesochè l' equazione della curva , $y^2=2px$, per un valore di y non ci dà che un sol valore di x ; perciò , dal supporre che due ordinate della curva siano eguali , deve risultarne la stessa eguaglianza riguardo alle ascisse corrispondenti. Non si verifica però la proposizione reciproca.

Così, applicando il metodo generale del n.° 66, che si riduce a combinare fra loro le due equazioni

$$y^2 = 2px\ ,\ y-y' = a\,(x-x')\ ,$$

si trova per risultato dell' eliminazione di y,

$$a^2x^2+2[a(y'-ax')-p]x+(y'-ax')^2 = 0\ ,$$

e per sisultato dell' eleminazione di x

$$ay^2-2p\,y-2p(ax'-y') = 0.$$

Affinchè le due radici dell' equazione in x siano eguali, convien che sia

$$[a(y'-ax')-p]^2-a^2(y'-ax')^2 = 0\ ,$$

o, sviluppando la prima parte, sopprimendo le due quantità $a^2(y'-ax')^2, -a^2(y'-ax)$, che si distruggono, ed ordinando rapporto ad a,

$$2px'.a^2-2py'a+p^2 = 0 \ldots\ldots (1).$$

In quanto ai due valori di y, vengono resi eguali dalla condizione $p^2+2ap\,(ax'-y') = 0$, ed ordinando riguardo ad y

$$2px'.a^2-2py'.a+p^2 = 0 \ \ldots\ldots (2)$$

risultato identico con il risultato (1).

Si vede perciò che la sola ipotesi che i due valori di y siano eguali, basta per condurci alla vera condizione di contatto, senza altra estranea condizione; mentre che quella, che esprime l' eguaglianza dei due valori di x, dà luogo ad una prima equazione che racchiude la soluzione $a = \infty$, essendo stati soppressi i termini in a^4 ed a^3.

Qualora si supponga dato sulla curva il punto (x', y'), avendosi $y'^2 = 2px'$, la (1) diviene

$$y'^2a^2-2py'a+p^2 = 0\ ,\ \text{o}\ (y'a-p)^2=0;\text{onde}\ a=\frac{p}{y'}\ ,$$

Tale infatti è il valore del coefficiente di $x-x''$ nell' equazione della tangente (sostituendo però y' ad y'').

203. L' equazione $y-y''=\frac{p}{y''}(x-x'')$ diviene, facendo svanire il denominatore, ed attesa la relazione $y''^2=2px''$,

$$yy''=p(x+x''),$$

equazione che non differisce da $y^2=2px$ che in quanto che ad y^2 e $2x$, o $y.y$ ed $x+x$ vengono sostituiti yy'' ed $x+x''$.

Facciamo ora, nell' equazione semplificata della tangente, $y=0$ (fig. 120); ne risulterà

$$x+x''=0,\ \text{onde}\ x=-x'',\ \text{o}\ AR=-AP,$$

Perciò, per condurre una tangente alla parabola in un punto dato M, basta *prendere una distanza* AR *eguale all' ascissa* AP *di questo punto*, e congiungere il punto M con il punto R.

Dal supporre $y=0$, nell' equazione non semplificata, volendosi il valore di $x-x''$, si trova

$$x-x''=-\frac{y''^2}{p}=-2x'';$$

ciò che dimostra, astraendo dal segno, che *la sottotangente* PR *è doppia dell' ascissa del punto di contatto*. Il segno poi, dal quale viene modificata, conviene alla sua attual posizione, valutandola a sinistra del punto F.

204. L' equazione della tangente nel punto M essendo

$$y-y''=\frac{p}{y''}(x-x''),$$

sarà quella della normale nello stesso punto

$$y-y''=-\frac{y''}{p}(x-x'');$$

che se si farà in quest' equazione, $y=0$, si otterrà

$$x-x'', \text{ o } PS=\frac{py''}{y''}=p.$$

Dunque, nella parabola, *la sottonormale è costante*, qualunque siasi la posizione del punto di contatto, ed *è eguale alla metà del parametro*.

205. Siccome, nella espressione $a=\frac{p}{y''}$, l'ordinata y'' può passare per tutti i stati di grandezza, ne siegue che la tangente sia suscettibile anch' essa di tutte le possibili situazioni riguardo al primo asse.

Sia $y''=0$, sarà $a=\infty$, cioè la tangente condotta del punto A è perpendicolare ad Ax.

E non diven parallela a quest' asse che nel punto che ci dà $y''=\infty$.

Piacendoci di conoscere in qual punto la tangente faccia con l'asse principale un' angolo di 50°, basta porre $\frac{p}{y''}=1$; ciò che ci dà $y''=p$,

e perciò $$x''=\frac{p^2}{2p}=\frac{p}{2};$$

ascissa che non appartiene che al foco F.

Perciò, in qualunque parabola, *la tangente fa un' angolo di 50°. all' estremità dell' ordinata che passa per il foco.*

206. Conduciamo il raggio vettore FM, (fig. 120), e calcoliamo l'angolo FMR, come fatto abbiamo per l'ellisse.

Rappresentando con a, a', le tangenti degli angoli MRX, MFX, avremo

$$\text{tang FMR, o tang } V=\frac{a'-a}{1+aa'}.$$

Ma, l'equazione del raggio vettore, che passa per il punto F per il quale $y = o$ ed $x = \frac{p}{2}$, ha la forma

$$y = a'\left(x - \frac{p}{2}\right);$$

e siccome passa ancora per il punto (x'', y''), ne risulta $y'' = a'\left(x'' - \frac{p}{2}\right)$; onde $a' = \frac{2y''}{2x'' - p}$.

Abbiamo altronde $a = \frac{p}{y''}$; dunque l'espressione di tang V diverrà

$$\text{tang } V = \frac{\frac{2y''}{2x''-p} - \frac{p}{y''}}{1 + \frac{2py''}{y''(2x''-p)}} = \frac{2y''^2 - 2px'' + p^2}{2x''y'' - py'' + 2py''}$$

ovvero, attesochè $y''^2 = 2px''$, o $2y''^2 = 4px''$,

$$\text{tang } V = \frac{2px'' + p^2}{2x''y'' + py''} = \frac{p(2x''+p)}{y''(2x''+p)} = \frac{p}{y''}$$

Si vede da ciò che l'ang. FMR = ang. MRF.

Dunque: *la tangente divide in due parti eguali l'ang.* FMH *formato dal raggio vettore* FM *e da una parallela all' asse delle* x, *condotta dal punto* M.

Potrebbe ciò verificarsi nel modo seguente.

Abbiam trovato (§ 203)

$$AR = AP \text{ ; onde } FR = \frac{p}{2} + AP.$$

Per altra parte, sia LL' la direttrice; il raggio vettore FM è eguale alla perpendicolare MG,

o $\frac{p}{2}$ + AP; dunque il triangolo FMR è isoscele, e ci dà ang. FMR = ang. MRF.

207. Questa proprietà ci abilita a condurre una tangente da un punto della curva, o da un punto preso fuori della curva.

1.° Per condurre una tangente per il punto M (fig. 120), basta *condurre la* MH *parallela ad* AX, *congiungere il punto* F *con il punto* G *ove la parallela incontra la direttrice*; *e poi calare* MR *perpendicolare ad* FG: avremo con ciò la tangente che si richiede, poichè il triangolo FMG isoscele vien diviso dalla MR in parti eguali tanto riguardo alla base FG, che all' angolo al vertice.

Può anche conoscersi *indirettamente*, che la retta che divide l' ang. FMG in due parti eguali non ha che il punto M in comune con la curva.

In fatti, supponiamo che fosse N un' altro punto, e guidiamo le rette FN e GN, e poi caliamo la perpendicolare NK sopra LL'.

Avremo, dalla costruzione, NF = NG; ma l' obbliqua NG è maggiore della perpendicolare NK; dunque NF è maggiore di NK, e perciò (§ 198) il punto N è situato fuori della curva.

Deve osservarsi che questa costruzione dipende unicamente dalla definizione della parabola.

2.° Per condurre la tangente da un punto N dato fuori della curva, *si descriva da questo punto come centro*, *con un raggio eguale alla distanza* NF, *una circonferenza di cerchio che tagli la direttrice nel punto* G, *e condotta* G*f parallela ad* AX, il punto M d' intersecazione, sarà il punto di contatto, poichè, abbiamo per costruzione,

$$NG = NF, \text{ ed } MG = MF;$$

dunque la retta NM è perpendicolare in mezzo della corda FG, e divide l'ang. FMG in due parti eguali.

La stessa circonferenza incontra la direttrice in un secondo punto G' tale, che, condotta per questo punto una parallela ad AX, il punto ove questa parallela incontra la curva è il punto di contatto della seconda tangente che può condursi per il punto N.

208. *Conseguenza* della proprietà precedente.

Si è veduto che, la retta FG, che congiunge i punti F e G, è perpendicolare alla tangente, ed è divisa in due parti eguali da questa stessa tangente. Per altra parte l' asse delle y, condotto per il punto A medio di BF, passa necessariamente anche per il mezzo di FG; dunque il piede I della perpendicolare, abbassata dal punto F sopra la tangente, si trova sopra l' asse delle y.

Si dimostra con ciò che, *se dal foco si calino delle perpendicolari sopra le tangenti alla parabola, il luogo geometrico dei piedi di tutte queste perpendicolari altro non è che il secondo asse principale.*

Questa proprietà è analoga a quella (§ 167) relativa all' ellisse ed all' iperbole.

Della parabola riferita ai suoi diametri o a' suoi assi conjugati.

209. Abbiam veduto (§ 136) che se, da un punto qualunque A' (fig. 121) della parabola, si conduca una tangente A'H, e poi una parallela A'K al primo asse, queste due rette, denominate *assi conjugati*, sono tali che qualunque corda MM', parallela ad A'H, è divisa in due parti eguali dalla retta A'H che, per questa ragione, si chiama *un diametro.*

Risulta da ciò, che l' equazione della parabola riferita a questo sistema, debba essere della forma $y^2 = kx$, essendo k una *costante* che pur dipende dalla posizione del punto A' sulla curva.

Per determinare coll'analisi il valore di questa costante eseguiremo una trasformazione ad oggetto di *riferire la parabola ad un nuovo sistema d'assi, di tal indole, che l'equazione conservi la stessa forma che ha quando la curva vien riferita ai suoi assi principali.*

L'equazione della parabola riferita ai suoi assi essendo $y^2 = 2px$ . . . . (1)
sostituiremo ad x ed y i loro valori

$$x = x \cos \alpha + y \cos \alpha' + a,$$
$$y = x \operatorname{sen} \alpha + y \operatorname{sen} \alpha' + b,$$

per mezzo de' quali (§ 89) si passa da un sistema rettangolare ad un sistema obliquo di origine differente ; ed otterremo

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 \alpha' . y^2 + 2 \operatorname{sen} \alpha' \operatorname{sen} \alpha . xy + \operatorname{sen}^2 \alpha x^2 \\ + (2 b \operatorname{sen} \alpha' - 2 p \cos \alpha') y \\ + (2 b \operatorname{sen} \alpha - 2 p \cos \alpha) x \\ + b^2 - 2pa \end{array}\right\} = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Ma quest' equazione, per ipotesi, deve ridursi alla forma $y^2 = kx$; dunque convien fissare varie condizioni, cioè

$$\operatorname{sen}\alpha' . \operatorname{sen}\alpha = 0, \operatorname{sen}^2\alpha = 0, b\operatorname{sen}\alpha' - p\cos\alpha' = 0, b^2 - 2pa = 0:$$

e la (2) si riduce ad $y^2 = \frac{2p}{\operatorname{sen}^2\alpha'} . x$ . . . (3).

Siccome la seconda delle fissate condizioni include necessariamente la prima, ne siegue che, per determinare α, α', a, b, non abbiamo in realtà che tre equazioni distinte. Perciò, il numero *dei sistemi di assi*, rapporto ai quali l'equazione conserva l'addotta forma, è *infinito.*

La relazione sen $\alpha = 0$, ci fa poi conoscere che il nuovo asse delle x, il quale, dalla forma del-

l' equazione (3), altro non è che un diametro, è parallelo all' asse principale. Dunque, nella parabola, *tutti i diametri sono paralleli all' asse principale.*

In secondo luogo, l' equazione $b^2 - 2ap = 0$, essendo ciò che diviene $y^2 = 2px$, o $y^2 - 2px = 0$, quando si sostituiscano le x ed y alle coordinate a e b della nuova origine, dobbiamo inferirne che *questa origine sia situata nella curva.* Dando ad a un valore arbitrario, si dedurrà dall' equazione $b^2 - 2pa = 0$, il valore corrispondente di b; ed il punto A', determinato da questi valori, rappresenterà la nuova origine.

Finalmente, l' equazione

$$b \text{ sen } \alpha' - p \cos \alpha' = 0, \text{ ci dà tang } \alpha' = \frac{p}{b},$$

espressione simile all' altra $a = \frac{p}{y''}$, già trovata per la tangente alla parabola; ciò che prova, che *il nuovo asse delle a è tangente alla curva.*

Questi risultati si accordano tutti con quanto si disse (§ 136) sopra gli assi conjugati.

Dalla relazione tang $\alpha' = \frac{p}{b}$, si deduce

$$\cos \alpha' = \frac{b}{\sqrt{(b^2+p^2)}}, \text{ e perciò },$$

$$\text{sen}^2 \alpha' = \text{tang}^2 \alpha' \cos^2 \alpha' = \frac{p^2}{b^2+p^2} = \frac{p}{2a+p}:$$

onde $$\frac{2p}{\text{sen}^2 \alpha'} = 4a + 2p = 4\left(a + \frac{p}{2}\right).$$

Ora, dal supporre che AG sia l' ascissa della nuova origine A' riferita ai primitivi assi, e dal

condurre il raggio vettore FA', si sà che questo raggio vettore ha per espressione $a + \frac{p}{2}$. Dunque $\frac{2p}{\text{sen}^2 a'} = 4$ A'F; cioè, *il parametro della parabola riferita ad un sistema d' assi conjugati*, ovvero, *il coefficiente di x nella equazione* (3), *è eguale al quadruplo della distanza del foco dalla nuova origine.*

Indicando con $2p'$ questo nuovo parametro, si ottiene alla fine $y^2 = 2p'x$ per l' equazione della parabola riferita all' uno de' suoi diametri.

Potremmo quì, come si è praticato per l' ellisse e per l' iperbole, proporci, reciprocamente, di passare dall' equazione della parabola riferita ad un sistema di assi conjugati, a quella della curva riferita ai suoi assi; ma questo calcolo non ci presenterebbe verun risultato importante.

210. L' equazione $y^2 = 2p'x$, o $\frac{y^2}{x} = 2p'$, prova che, per un qualunque sistema di assi conjugati, *i quadrati delle ordinate sono proporzionali alle ascisse corrispondenti*; e questa è la proprietà del n.° 199, generalizzata, poichè gli assi principali formano un sistema particolare di assi conjugati.

Questa proprietà verificandosi, qualunque sia l' inclinazione degli assi, potremo, con un processo simile a quello già impiegato (§ 184), costruire la parabola, conoscendo l' angolo dei due assi conjugati ed il parametro corrispondente.

Siano AX, AY (fig. 122) i due assi conjugati che vengono assegnati. *Innalzata nel punto* A *una perpendicolare ad* AX, *si costruisca sopra* AX, AY', *considerati come assi principali,*

una parabola ANN′ *che abbia per parametro* $2p'$; *condotte poi dai diversi punti* P , P′ , . . . *delle parallele ad* AY′ ; *ed* AY , *e prese le parti* P M , P′M′, . . . , *eguali a* PN, P′N′, . . ., i punti M , M′ , ... apparterranno alla curva che si richiede. (Ved. § 256. per questo stesso quesito).

231. Risolvendo il problema delle tangenti, con il metodo del n.° 201, si trova per l'equazione della tangente, allorchè il punto dato sia sulla curva, $y-y''=\frac{p'}{y''}(x-x'')$; o, semplificando mediante la relazione

$$y''^2=2px'',\ yy''=p'(x+x'').$$

Supponendo nella seconda equazione $y=0$, si trova $x=-x''$; cioè (fig. 121), A′R=—A′P.

L'ipotesi di $y=0$, introdotta nella prima ci dà $x=x''=-\frac{y''^2}{2p'}=-2x''$; ciò che prova che *la sotto tangente* PR *è negativa*, *ed aritmeticamente doppia dell' ascissa del punto di contatto*.

Questi risultati si conosceranno analoghi a quelli del n.° 203.

In quanto alla *sottonormale*, la proprietà dimostrata n.° 204, non può aver luogo nel caso degli assi conjugati obbliqui; perchè il coefficiente di x nell' equazione della normale, dipende essenzialmente dalla loro inclinazione.

232. Supponiamo adesso che debba condursi una tangente da un punto N (fig. 123), o (x' , y'), preso fuori della curva. Per determinare le coordinate x'' , y'' , del punto di contatto, avremo le equazioni

$'' = 2p'x''$ ed $y'y'' = p'(x' + x'')$.

Ma piuttosto che prevalerci della eliminazione, che non presenterebbe alcun vantaggio, potremo, riguardando x'', y'' come variabili, costruire i luoghi geometrici di queste equazioni.

La prima rappresenta ad evidenza la parabola gia costruita.

In quanto alla seconda, che esprime una linea retta, facendovi successivamente

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' = 0 \\ x'' = 0 \end{array} \right\}, \text{ si trova } \left\{ \begin{array}{l} x'' = -x' \\ y'' = \frac{px'}{y'}. \end{array} \right.$$

Ora, se supporremo che sopra gli assi AX, AY vengano portate le parti AI, AH, respettivamente eguali $a - x'$, $\frac{px'}{y'}$, e che si conduca la retta IH, si avrà con ciò il luogo geometrico che si richiede; cosichè i punti M, m', ove questa retta di congiunzione taglia la curva, sono i punti di contatto delle due tangenti che devono passare per il punto N.

Siccome il risultato $x'' = -x'$ corrispondente ad $y'' = 0$, non dipende dall' ordinata y' del punto N, ne siegue che, prendendo un secondo punto N' sopra una parallela all' asse delle y condotta dal punto N, e guidando le due tangenti N'M', N'm', la linea di congiunzione dei nuovi punti di contatto debba passare per lo stesso punto I dell' asse AX; e così, in seguito, per gli altri punti della retta LL'.

Quest' ultima retta può riguardarsi ancora come situata ad arbitrio sul piano della parabola; dunque la proprietà dimostrata (§ 186) per l'ellisse e per l' iperbole, è egualmente vera per la parabola. Lo stesso deve dirsi della reciproca.

Osserveremo tuttavia che, se la retta data fosse una parallela LL' all' asse principale, cioè un diametro, le rette di congiunzione dei punti di contatto M ed m, M' ed m' (fig. 124) non più concorrebbero in uno stesso punto; ma sarebbero tutte parallele fra loro, cioè s' incontrerebbero tutte all' *infinito* in un punto situato sull' asse conjugato di questo diametro.

In fatti, supponiamo, per un' istante, la curva riferita a questo diametro ed al suo conjugato AY; siccome, per un punto N della retta LL' abbiamo x' qualunque, ma $y' = o$, ne discende, che i risultati $x'' = -x'$, $y'' = \frac{px'}{y'}$ ottenuti di sopra, e corrispondenti respettivamente ad $y'' = o$, $x'' = o$, si riducano ad

$$x'' = -x' \text{ ed } y'' = \frac{px'}{o}.$$

Di qui è che la linea di congiunzione dei due punti di contatto M ed m và ad incontrare l'asse delle y all' infinito.

In altro modo: l' equazione della retta di congiunzione che, in generale, ha la forma $y'y'' = p'(x'+x'')$, si riduce, nell' ipotesi di $y' = o$, a $p'(x'+x'') = o$, onde $x'' = -x'$, equazione di una parallela all' asse delle y.

213. Ultimeremo la teoria della parabola con i seguenti quesiti: una parabola essendo delineata sopra un piano, si determini:

1.° *I suoi assi principali.*

2.° *Un sistema di assi conjugati* che facciano fra loro un' angolo dato:

3.° *Il parametro* all' asse principale, o ad un qualunque diametro.

Delineate prima due corde parallele mm', nn', e presi i mezzi di queste corde; nella retta ab

(fig. 125) che congiunge questi punti medj (§ 132), avremo *un diametro.*

Fissato ciò, siccome ogni diametro è parallelo all'asse principale, dal quale vien divisa in due parti eguali ogni corda della curva che gli sia perpendicolare, ne siegue che, *se si tiri una qualunque corda* MM' *perpendicolare ad* a b, *e si guidi per il mezzo* P *di questa corda una parallela ad* a b, si otterrà AB per *il primo asse principale*; AC perpendicolare ad AB sarà *il secondo asse.*

Per risolvere il secondo quesito: *faremo, in un qualunque punto* G *di* AB, *un' angolo* NGB *eguale a quello dei due assi conjugati*; *poi per il punto* Q *medio di* NN', *condurremo* A'B' *parallela ad* AB; *e dopo di aver condotta dal punto* A' *la* A'C' *parallela ad* NN', avremo il richiesto sistema di *assi conjugati.*

N. B. Questa costruzione ci somministra sensibilmente il mezzo di *condurre alla parabola una tangente* parallela ad una retta data NN'.

Riguardo al terzo quesito, siccome, dalle precedenti costruzioni, si conoscono le grandezze delle rette AP, MP, o A'Q, NQ, i due parametri $2p$, $2p'$ si otterranno dalle relazioni

$$2p=\frac{\overline{MP}^2}{AP},\ e\ \ 2p'=\frac{\overline{NQ}^2}{A'Q}.$$

Cognito il parametro all'asse principale, se ne dedurrà facilmente *la posizione del foco, e quella della direttrice.*

214. I quesiti precedenti vengono seguiti da un'altro, che ha relazione con le tre curve di secondo grado:

Delineata sopra un piano una porzione di sezione conica, debba determinarsi la natura di questa curva, cioè, riconoscersi se la curva è un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

Quest' ultimo quesito riducesi, come ognun vede, a *delineare due corde parallele, prima in una, e poi in un' altra direzione; ed a congiungere i punti medj tanto delle prime che delle altre.*

Secondo che queste rette di congiunzione si taglieranno *dentro*, o *fuori dell' arco dato*, la curva sarà o un' ellisse, o un' iperbole, o una parabola.

Perciò che riguarda la determinazione dei diversi elementi della curva, dovremo ricorrere ai mezzi indicati (§§ 190, 191, e 213).

§ IV. *Equazioni polari delle tre curve di secondo grado.*

215. Abbiamo fin qui supposto che la posizione di una curva venisse determinata sopra di un piano mediante un' equazione fra due variabili esprimenti le distanze di ciascuno de' suoi punti da due rette fisse riguardate parallelamente alle rette variabili. Esiste però un' altro mezzo, il quale, in certi casi, presenta de' vantaggi riguardo al primo (fig. 126).

Per fissare le idee riguardo a questo nuovo modo di rappresentare analiticamente le linee, consideriamo una qualunque curva mMm', una retta OB di posizione determinata sopra il piano di questa curva, ed un punto fisso O sopra questa retta. Guidiamo da questo punto, chiamato *polo*, ad un qualunque punto M della curva una retta OM, denominata *raggio vettore*; e indichiamo con r questo raggio vettore, con φ l' angolo che esso forma con la retta fissa OB.

Se potremo giungere a stabilire, in qualunque siasi maniera, una relazione fra r e φ, che si verifichi per tutti i punti della curva, e che non abbia luogo che per questi punti, si vede che

la curva sarà intieramente determinata; poichè, dando a v una serie di valori v', v'', v''', ... si dedurranno, dalla relazione $f(r, v) = o$, i valori corrispondenti r', r'', r''', ... per r. Formando allora nel punto O gli angoli LOB, L'OB, ... eguali a v', v'', ..., e portando sopra OL, OL', ... le parti eguali ad r', r'', ..., verremo ad ottenere i punti M, M', ..., che apparterranno alla curva.

Le variabili r e v assumono il nome di *coordinate polari*, e l'equazione $f(r, v) = o$ si denomina *equazione polare* della curva.

216. Essendo delineata una curva sopra un piano, possiamo proporci di determinare direttamente *un' equazione polare* di questa curva, prendendo in un modo adattato il *polo* e la retta fissa guidata da questo punto. Suol supporsi però già fissata la curva mediante una prima equazione fra coordinate rettangolari o oblique (queste si denominano *coordinate ortogonali*); ed in tal caso deve dedursene un' equazione fra le coordinate polari. Questa trasformazione di coordinate può effettuarsi facilmente.

Siano, infatti, AX, AY (fig. 126) due assi rapporto ai quali abbiasi un' equazione tale che sia $f(x, y) = o$.

Condotte dal punto fisso O le rette OX', OY' parallele a questi assi s' indichino con a, b, le coordinate AH, OH del polo O, con α l' ang. BOX', con β l' angolo dei due assi; il raggio vettore OM, e l' ang. MOB verranno poi rappresentati come sopra con r e v.

Ciò posto, abbiamo sensibilmente della figura

$$\text{AP} \quad \text{o} \quad x = a + \text{OK}$$

$$\text{MP} \quad \text{o} \quad y = b + \text{MK};$$

ma, dal triangolo MOK, risultando

$$OK : OM :: \text{sen } OMK : \text{sen } OKM$$

$$MK : OM :: \text{sen } MOK : \text{sen } OKM;$$

ne dedurremo $OK = \frac{r \text{ sen } (\beta - \nu - \alpha)}{\text{sen } \beta}$

e $MK = \frac{r \text{ sen } (\nu + \alpha)}{\text{sen } \beta}$.

Da questi valori, sostituiti nelle espressioni di x ed y, si ottengono i valori

$$x = a + \frac{r \text{ sen } (\beta - \nu - \alpha)}{\text{sen } \beta},$$

$$y = b + \frac{r \text{ sen } (\nu + \alpha)}{\text{sen } \beta} \quad \ldots \ldots \ldots (1);$$

questi sostituiti nell' equazione $f(x, y) = 0$, ci daranno *l' equazione polare che si richiede.*

Qualora gli assi siano rettangolari, come accade il più delle volte, sarà

$\beta = 100^{\circ}$, onde sen $\beta = 1$, sen$(\beta - \nu - \alpha) =$ cos$(\nu + \alpha)$;

e le formole diventano

$$x = a + r \cos(\nu + \alpha),\ y = b + r \text{ sen } (\nu + \alpha) \ \ldots (2).$$

Oltre questa ipotesi, può ancora supporsi che la retta fissa sia parallela all' asse delle x, nel qual caso è $\alpha = 0$; e le formole divengono

$$x = a + r \cos \nu,\ y = b + r \text{ sen } (\nu + \alpha) \ldots (3).$$

Finalmente, in queste medesime circostanze, può prendersi per *polo* l'origine stessa delle primitive coordinate; e da ciò verrebbero ridotte le formole ad

$$x = r \cos \nu,\ y = r \text{ sen } \nu \ \ldots \ldots (4).$$

I due ultimi sistemi sono di maggior uso.

27. Per avere una prima idea della maniera di usarne, proponiamoci di determinare *l'equazione polare del cerchio*, prendendo per *polo* un qualunque punto O (fig. 127) situato sul piano di questo cerchio.

L'equazione del cerchio, riferita al suo centro e ad assi rettangolari, essendo $y^2+x^2=R^2$, basta sostituire ad x ed y i loro valori dedotti dalla (3); e si otterrà, dallo sviluppare ed ordinare rapporto ad r,

$$r^2+2(b\,\text{sen}\,v+a\cos v)\,r+a^2+b^2-R^2=0\,;$$

(la retta fissa, partendo dalla quale si valuta l'angolo v, è una retta OB parallela all'asse delle x).

Rappresentiamo con r', r'', le due radici di questa equazione, avremo, per un principio cognito (t° 1.° pag. 182),

$$r'.r''=a^2+b^2-R^2.$$

Ma, questa relazione essendo indipendente dall'ang. v formato dalla direzione del raggio vettore OM con OB, ne siegue che, da due rette qualunque Mm, M'm', condotte per il punto O, debba aversi la relazione

$$OM\times Om=OM'\times Om',\ \text{o}\ OM:OM'::Om':Om\,;$$

ciò che conferma quanto si dimostrò in Geometria (t.° 2.° § 50), cioè che due corde si tagliano, in un cerchio, in *parti reciprocamente proporzionali*.

Fintanto che il punto O si conserva interiore al cerchio, a^2+b^2, o $\overline{AO}^2$, è minore di AC^2 o di R^2; e perciò $a^2+b^2-R^2$ è *negativo*; come dev'essere, attesochè le distanze OM, Om si valutano in senso contrario fra loro.

Se, all'opposto, il punto O sarà esteriore, come in O', avremo a^2+b^2, o $\overline{AO}^2>R^2$, ed a^2+

b^2-R^2 sarà *positivo*. La proprietà delle secanti, come $O'n$, viene ad essere dimostrata, dalla relazione addotta di sopra, poichè abbiamo $ON \times O'n$ eguale ad una quantità costante, qualunque sia l'inclinazione della secante.

Dobbiam dire lo stesso della proprietà della tangente riguardo alla secante; poichè il triangolo rettangolo ADO' ci da $\overline{O'D}^2 = \overline{AO'}^2 - \overline{AD}^2 = a^2 + b^2 - R^2$; onde $\overline{O'D}^2 = O'N \times O'n$; relazione già cognita (t.° 2.° § 50)

218. Siaci proposto ancora di trovare l'equazione polare dell'iperbole, prendendo, per *polo* il centro stesso della curva, e per *retta fissa* il primo asse.

Non si tratta qui che di sostituire i valori $x = r \cos v$, ed $y = r \operatorname{sen} v$ (fig. 73) nell'equazione $(A^2 y^2 - B^2 x^2 = -A^2B^2$; per avere

$$(A^2 \operatorname{sen}^2 v - B^2 \cos^2 v) r^2 = -A^2B^2 ; \text{ d' onde}$$

$$r = \frac{\pm AB}{\cos v . \sqrt{(B^2 - A^2 \operatorname{tang}^2 v)}} .$$

Da questo risultato veniamo prima a conoscere che se, per il punto O, si tiri una qualunque retta Mm', le due parti OM, Om' sono *eguali e con segni opposti.*

Di più, affinchè riesca reale il valore di r, bisogna che sia la $\operatorname{tang}^2 v$ minore, o al più $= \frac{B^2}{A^2}$.

Sia $\operatorname{tang}^2 v = \frac{B^2}{A^2}$, ne risulta $\operatorname{tang} v = \pm \frac{B}{A}$.

Si vede dunque che le rette condotte per il punto O, in modo che formino con AX angoli che abbiano per tangenti $+\frac{B}{A}$ e $-\frac{B}{A}$; queste ret-

te, dico, separano le rette che incontrano la curva da quelle che non la incontrano (ved. § 108)

Quanto precede basta a farci travedere con qual facilità una trasformazione di coordinate ortogonali in coordinate polari ponga in evidenza alcune proprietà delle linee curve.

219. Discendiamo adesso a determinare le equazioni polari di tre sezioni coniche del caso più usitato, di quello cioè in cui si prende per *polo* uno dei fochi della curva, e per retta fissa il primo asse.

Ellisse. Sia F (fig. 128) il foco preso per polo; avremo, in tal caso, $b=0$, $a=c$; e le formole (3) del n.° 216 divengono

$$x=c+r\cos v,\quad y=r\ \mathrm{sen}\ v.$$

Questi valori sostituiti nell' equazione della curva $A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$, o piuttosto

$$A^2y^2+(A^2-c^2)x^2=A^2(A^2-c^2)$$

(per avere nei calcoli due sole costanti A e c); otterremo

$$(A^2-c^2\cos^2 v)r^2+2(A^2-c^2)c\cos v\, r-(A^2-c^2)^2=0;\text{onde}$$

$$r=\frac{(A^2-c^2)c\cos v\pm\sqrt{[(A^2-c^2)^2c^2\cos^2 v+(A^2-c^2)^2(A^2-c^2\cos^2 v)]}}{A^2-c^2\cos^2 v}$$

o, riducendo la quantità sotto il radicale,

$$r=\frac{(A^2-c^2)(-c\cos v\pm A)}{A^2-c^2\cos^2 v},$$

espressione che, considerata successivamente e con il segno superiore e poi coll' inferiore, ci dà a riduzione effettuata,

$$r=\frac{A^2-c^2}{A+c\cos v},\ \text{ed}\ r=-\frac{A^2-c^2}{A-c\cos v}.$$

Discussione. Il primo di questi due valori è essenzialmente *positivo*, perchè A^2-c^2, o B^2, è positivo, e quand' anche $\cos v$ fosse negativo, siccome un coseno non può sorpassare l'unità, e siccome c, o $\sqrt{(A^2-B^2)}$, è minore di A, deve aversi necessariamente $A+c\cos v > 0$.

Il secondo è, per la stessa ragione, essenzialmente *negativo*; e ciò dev' essere, poichè, da qualunque posizione del raggio vettore, risultano sempre due punti M ed m, N ed n in una posizione inversa l'uno dall'altro, riguardo al punto F. Ma, astraendo dal segno del secondo valore, si vede che esso si deduce dal primo col cangiare $\cos v$ in $-\cos v$; d'onde si deduce che basta il solo primo per darci tutti i punti della curva, con la condizione di far passare l'ang. v per tutti i stati di grandezza da 0° fino a 400°.

Discendiamo ad alcune ipotesi sull' ang. v, per determinare i valori corrispondenti di r.

Sia $v=0$, onde $\cos v=1$; si avrà

$$r=\frac{A^2-c^2}{A+c}=A-c=FB;$$

$v=100^{\circ}$, onde $\cos v=0$; dunque

$$r=\frac{A^2-c^2}{A}=\frac{B^2}{A}=FN, \text{ semi-parametro};$$

$v=200^{\circ}$, onde $\cos v=-1$; dunque

$$r=A+c=FA$$

$v=300^{\circ}$, onde $\cos v=0$, dunque

$$r=\frac{A^2-c^2}{A}=\frac{B^2}{A}=Fn.$$

Nell' ipotesi di $v=100^{\circ}$, il secondo valor generico di r diviene,

$$r=-\frac{A^2-c^2}{A}=-\frac{B^2}{A}.$$

Bastano queste ipotesi per far conoscere che l'equazione $r = \frac{A^2 - c^2}{A + c \cos v}$ rappresenta tutti i punti della curva come l'equazione

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2.$$

220. *Iperbole.* Nell' equazione di questa curva riferita ai suoi assi, $A^2 y^2 - B^2 x^2 = -A^2 B^2$,

$$\text{o } A^2 y^2 - (c^2 - A^2) x^2 = -A^2 (c^2 - A),$$

convien sostituire ad y ed x i valori $y = r \operatorname{sen} v$ ed $x = c + r \cos v$, o piuttosto, $x = c - r \cos v$; attesochè trovandosi i vertici B ed A (fig. 129) della curva situati a sinistra del punto F, deve valutarsi l'ang. v nella direzione FBA e ciò si riduce a sostituire $200° - v$ in luogo di v nella formola $x = c + r \cos v$.

Con tal sostituzione, a simplificazioni effettuate come per l'ellisse, si troverà

$$r = \frac{c^2 - A^2}{A + c \cos v}, \quad r = -\frac{c^2 - A^2}{A - c \cos v}$$

La *discussione* di questi valori merita una particolare attenzione.

Finchè l'angolo v è minore di 100°, il cos v è positivo, e diminuisce sempre più a misura che aumenta v fino a questo limite; dunque la prima espressione di r è *positiva* ed aumenta di più in più, da $r = c - A$, o B, che corrisponde a $v = 0$, o $\cos v = 1$, fino ad

$$r = \frac{c^2 - A^2}{A}, \text{ o } \frac{B^2}{A}$$

che corrisponde a $v = 100°$, o $\cos v = 0$.

Quando v sorpassa 100°, il cos v è negativo ed aumenta aritmeticamente; non accade lo stesso di $c \cos v$; e, affinchè $A + c \cos$ resti positivo

bisogna che v sia minore dell' angolo dal quale risulta $A+c\cos v=0$; e $\cos v=-\frac{A}{c}$, onde

$$\tang v=\sqrt{(\sec^2 v-1)}=\sqrt{(\frac{c^2}{A^2}-1)}=-\frac{B}{A};$$

vale a dire che, se si guida per il punto F la retta FG parallela all' assintoto OL, l' angolo v non dev' esser maggiore di OFG.

Sia $v=$ OFG, d' onde $\cos v=-\frac{A}{c}$; ne risulta

$$r=\frac{c^2-A^2}{A+c\times-\frac{A}{c}}=\frac{c^2-A^2}{0}=\infty;$$

come dev' essere, perchè allora il raggio vettore è parallo ad OL.

Quando v sorpassi l' ang. OFG, la prima espression di r divien negativa; ma osserveremo che, siccome questa espressione non cangia col sostituir v a $-v$ (sapendosi che $\cos-v=\cos+v$, *t.*°3° § 90), perciò è essa capace di rappresentare tanto la porzione Bm''' m'' . . . . . , come anche la porzione B m'' M''' . . . . del primo ramo.

Per un qualunque valore dato a v, per esempio OFM'', basta descrivere dal punto F come centro, e con un raggio eguale al valore corrispondente di r, un arco di cerchio M'' Dm''', e poi prendere Dm'''= DM''.

Vediamo adesso cosa divenga la seconda espressione nel far passare l' angolo v per diverse pres-di grandezza.

A questa seconda espressione può darsi la forma

$$r=\frac{c^2-A^2}{c\cos v-A}$$

Ciò posto, sia primieramente $\nu=0$ ed essa diverrà $r=\frac{c^2-A^2}{c-A}=c+A=FA$.

Di più, si vede che r resterà *positivo* finchè l'ang. ν avrà un valore minore di quello espresso da $c\cos\nu-A=0$, o $\cos\nu=\frac{A}{c}$, o $\tang\nu=\frac{B}{A}$; cioè, finchè il raggio vettore sarà situato fra FA ed FK' parallela al secondo assintoto OH'.

Sia $\nu=$ OFK', onde $\cos\nu=\frac{A}{c}$; troveremo

$$r=\frac{c^2-A^2}{0}=\infty.$$

Nella ipotesi stessa, la prima espressione generica di r diviene

$$r=\frac{c^2-A^2}{A+c\times\frac{A}{c}}=\frac{c^2-A^2}{2A}=\frac{B^2}{2A}=FI=\frac{1}{2}FN.$$

Per un valore di ν maggiore di OFK', la seconda espressione diviene negativa; ma, dalla osservazione fatta di sopra, questa seconda espressione rappresenta non solo la porzione AmS, ma ancora la porzione Am'S' del secondo ramo.

Si raccoglie da tutto ciò; che il primo ramo dell'iperbole è rappresentato *con raggi positivi*, dalla prima espressione di r, per valori di ν positivi o negativi, e compresi fra *zero* ed OFG, o fra *zero* ed OFK.

Che il secondo ramo è rappresentato anch'esso *con raggi positivi* dalla seconda espressione di r, per valori di ν positivi o negativi e compresi fra *zero* ed OFG'.

Non accade dunque per l'iperbole come per l'el-

lisse. In questa, basta la prima espressione di r per rappresentare tutti i punti della curva *in raggi positivi*; mentre nell' iperbole, è indispensabile la considerazione di due espressioni.

221. *Parabola*. Ripetendo per questa curva, riguardo al modo di valutare l' ang. v, l' osservazione che fatta abbiamo per l' iperbole, saremo condotti a sostituire nell' equazione $y^2 = 2px$ (fig. 130), i valori $y = r \operatorname{sen} v$, $x = \frac{p}{2} - r \cos v$.

Otterremo da tal sostituzione, attesochè $\operatorname{sen}^2 v = 1 - \cos^2 v$;

$$(1-\cos^2 v)r^2 + 2p \cos v . r - p^2 = 0,\ \text{onde}$$

$$r = \frac{-p\cos v \pm \sqrt{[p^2\cos^2 v + p^2(1-\cos^2 v)]}}{1-\cos^2 v} = \frac{p(-\cos v \pm 1)}{1-\cos^2 v};$$

dunque $r = \frac{p}{1+\cos v}$, ed $r = -\frac{p}{1-\cos v}$.

La prima espressione è essenzialmente *positiva*, e la seconda *negativa*; ciò proviene attesochè, per una posizione qualunque MFm del raggio vettore, i due punti M, m sono sempre in opposizione riguardo al punto F.

La prima bensì può bastare essa sola a darci tutti i punti della curva, facendo variare l' ang. v da 0° fino a 400°.

Per $v = 0$, e $\cos v = 1$, si trova $r = \frac{p}{2} = \text{FA}$;

$v = 100°$, e $\cos v = 0$, risulta $r = p = \text{FN}$;

$v = 200°$, $\cos v = -1$, sarà $r = \frac{p}{0} = \infty$;

$v = 300°$, $\cos v = 0$, si ottiene $r = \frac{p}{2} = \text{FN}$,

222. Per non ommettere cosa alcuna su di tal materia, esporremo il mezzo per ottenere le equazioni polari delle tre curve, direttamente, cioè partendo dalle definizioni di queste curve.

Ellisse. Abbiamo trovato (§ 98) che il raggio vettore FM, o r, ha per espressione $A-\frac{cx}{A}$ (fig. 128), rappresentando x la distanza del punto O dal piede della perpendicolare MP.

Ciò posto, sia x' la distanza FP; avremo evidentemente $x=c+x'$; ma il triangolo rettangolo FPM ci dà $x'=r\cos v$; d'onde $x=c+r\cos v$.

Questo valore venga sostituito nella espressione

$$r=A-\frac{cx}{A},\ \text{e si otterrà}$$

$$r=\frac{A^2-c(c+r\cos v)}{A}=\frac{A^2-c^2-c\,r\cos v}{A};$$

d'onde deducesi $r=\frac{A^2-c^2}{x+c\cos v}$.

Anche per il raggio Fm si ottiene $r=x-\frac{cx}{A}$; ma

x, o $Op=c-Fp=c-x'$, ed $x'=r\cos pFm=r\cos v$; d'onde $x=c-r\cos v$.

Dunque $r=A-\frac{c(c-r\cos v)}{A}=\frac{A^2-c^2+cr\cos v}{A}$;

e perciò $r=A\frac{A^2-c^2}{A-c\cos v}$.

Questa espressione del secondo raggio Fm si ottiene indipendentemente dal suo segno atteso che è stata ricercata direttamente. Ma riguardando queste

due espressioni collegate fra loro da una stessa equazione, è allora che devono essere affette dai *loro valori correlativi*.

Iperbole. Si è veduto (§ 105) che FM, o

$r=\frac{cx}{A}-A$ (fig. 129); ma la figura ci dà

$$x \text{ o } OP=c-x' \text{ ; } x'=r \cos v \text{ ;}$$

d'onde $x=c-r\cos v$, dunque

$r=\frac{c(c-r\cos v)}{A}-A=\frac{c^2-A^2-cr\cos v}{A}$; e perciò,

$$r=\frac{c^2-A^2}{x+c\cos v}.$$

Per il punto m abbiamo Fm o $r=\frac{cx}{A}+A$;

ma x o Op=Fp—FO$=x'-c$, $x'=r\cos v$; e perciò

$r=\frac{c(r\cos v-c)}{A}+A^2=\frac{cr\cos v-c^2+A^2}{A}$; onde

$$r=\frac{-(c^2-A^2)}{A-c\cos v}=\frac{c^2-A^2}{c\cos v-A}.$$

Al secondo raggio compete un'espressione affatto identica a quella del n.° 220; e così dev'essere attesochè questo raggio ora è positivo ed ora negativo.

Parabola. Abbiamo ottenuto (§ 112) FM

o $r=x+\frac{p}{2}$ (fig. 130); ma x o AP$=\frac{p}{2}-x'$,

$x'=r\cos v$, d'onde $x=\frac{p}{2}-r\cos v$; dunque

$r = p - r \cos v$, e perciò, $r = \frac{p}{1 + \cos v}$.

In simil guisa si otterrebbe il secondo raggio vettore, prescindendo però dal suo segno.

Delle sezioni coniche simili.

Benchè le proposizioni che sieguono non si associno ad alcuna delle precedenti teorie, ciò non ostante non sono meno importanti a conoscersi.

223. Due ellissi o due iperbole si dicono *simili* quando hanno *i loro assi proporzionali*. Così, siano A e B i semi-assi di una prima ellisse, a e b quelli di una seconda ellisse; queste due curve saranno simili, se avremo la proporzione

$$A:B::a:b\,, \quad \text{o} \quad A:a::B:b \ldots, (1).$$

L'addotta denominazione ha luogo appunto perchè alle due curve competono allora le stesse proprietà delle figure simili di Geometria: e ciò deve ora da noi dimostrarsi.

Per una maggior semplicità verranno inserite le curve l'una nell'altra (fig. 131) in modo che siano concentriche e che i loro assi si confondino.

Siano dunque due ellissi per le quali OA, Oa, rappresentino i semi-assi maggiori, le metà dei minori assi saranno determinati dalle parallele AC, Ac; cosichè avremo

$$OA:Oa::OC:Oc\,, \quad \text{o} \quad A:a::B:b.$$

Ciò posto; 1.° Prendiamo a considerare una qualunque linea OL guidata dal centro, e chiamiamo D, d i semidiametri OM, Om; X, Y, le coordinate del punto M; ed x, y, quelle del punto m.

Poichè i tre punti O, m, M, sono in linea retta, avremo la proporzione $Y:X::y:x$; e siccome M, m appartengono alle due curve, avremo

le equazioni $A^2Y^2=B^2(A^2-X^2)$, $a^2y^2=b^2(a^2-x^2)$; e, divise l'una per l'altra, ed attese le relazioni (1),

$Y^2 : y^2 :: A^2-X^2 : a^2-x^2$; ma abbiamo già

$Y^2 : y^2 :: X^2 : x^2$; dunque

$X^2 : x^2 :: A^2-X^2 : a^2-x^2$, o $a^2X^2=A^2x^2$;

e perciò, $\frac{X}{x}=\frac{A}{a}=\frac{Y}{y}=\frac{D}{d}$ . . . . (2).

Dunque, le rette MP ed *mp*, OP ed O*p*, OM ed O*m*, *hanno fra loro il rapporto degli assi* A ed *a*

2.° Siano altri due punti M', *m'*, situati sopra una stessa retta OL'; e, chiamando D', *d'* i semidiametri OM', O*m'*, otterremo similmente

$D' : d' :: A : a :: D : d$;

dunque, guidando le corde MM', *mm'*, vengono a formarsi due triangoli simili OMM', O*mm'*, che danno $MM' : mm' :: D : d :: A : a$,

e di più, le corde MM', *mm'*, sono *parallele*.

3.° Figuriamoci adesso inscritti alle elissi due poligoni, gli angoli dei quali siano due a due in direzione rettilinea con il centro. Per la precedente proposizione questi poligoni hanno i loro lati paralleli e respettivamente proporzionali; sono dunque essi simili. E perciò i contorni di questi poligoni sono proporzionali ai semiassi delle due ellissi; e le loro superfici sono fra loro come i quadrati di questi semiassi.

Questi due risultati essendo veri, qualunque siasi il numero dei lati dei poligoni, lo saranno ancora fino al limite di questi lati.

E potremo perciò concludere che *i contorni* E, *e*, *delle due Ellissi*, *hanno fra loro il rapporto* dei semi-assi, e *che le loro superfici* S ed *s*, *hanno fra loro il rapporto dei quadrati di questi semiassi*; cosichè avremo

$$E : e :: A : a, \quad \text{ed} \quad S : s :: A^2 : a^2.$$

Quest' ultima relazione può ancora dedursi dalla espressione trovata al n.° 147, per la superficie dell' ellisse. Abbiamo infatti

$$S = \pi A.B, \quad S = \pi a.b; \text{ onde}$$

$$\frac{S}{s} = \frac{A}{a} \cdot \frac{B}{b} = \frac{A^2}{a^2}.$$

Deve dirsi lo stesso di *due settori elittici* corrispondenti ai medesimi diametri.

4.° Siano F, f, i fuochi di due ellissi; e le excentricità OF, Of, vengano indicate con C, c; avremo

$$C = \sqrt{(A^2 - B^2)} = A\sqrt{\left(1 - \frac{B^2}{A^2}\right)}, c = a\sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}.$$

Dunque, attesa la relazione (1)..., C : c :: A : a... (3).

5.° Dalle relazioni (2) e (3) risulta che, congiungendo i punti M, m con i punti F, f, vengono a formarsi due triangoli simili OMF, Omf; che ci danno FM : fm :: OF : Of :: A : a; di più, questi raggi vettori sono *paralleli*.

Ciò che potrebbe ancora conoscersi per mezzo delle equazioni polari delle due ellissi.

6.° Siano le tangenti MR, mr; abbiamo trovato (§ 155) per le sottotangenti PR, pr,

$$PR = \frac{A^2 - X^2}{X}, \quad pr = \frac{a^2 - x^2}{x}; \quad \text{d' onde}$$

$$\frac{PR}{pr} = \frac{A^2 - X^2}{a^2 - x^2} \cdot \frac{x}{X} = \frac{X^2}{x^2} \cdot \frac{x}{X} = \frac{X}{x} = \frac{A}{a};$$

e per le sottonormali PS, ps,

$$PS = \frac{A^2 - B^2}{A^2} \cdot X = \frac{C^2}{A^2} X, \quad ps = \frac{c^2}{a^2} \cdot x; \text{ onde}$$

$$\frac{PS}{ps}=\frac{X}{x}=\frac{A}{a}$$

N. B. L' espressione

$$PR=\frac{A^2-B^2}{A^2}.X=X-\frac{B^2}{A^2}.X,$$

non dipendendo che dall' ascissa del punto M, e dal *rapporto degli assi*, ne siegue che, per tutte le ellisi simili, *le normali condotte ai punti* M, m'', ... *corrispondenti alla medesima ascissa* OP, incontrano l' asse maggiore nello stesso punto S.

7.° La somiglianza dei triangoli MPR, *mpr*, aventi un' angolo eguale compreso fra lati proporzionali, prova che le tangenti MR, *mr*, sono parallele; dunque (§ 162) i due semidiametri conjugati dei diametri OM, O*m*, sono situati sopra una stessa retta; e, chiamando A', B', i semidiametri conjugati della prima ellisse, *a'*, *b'*, i corrispondenti semidiametri conjugati della seconda, avremo la proporzione

$$A':a'::B':b'::A:a.$$

Le conseguenze che risultano dal confronto di due ellissi simili potrebbero moltiplicarsi senza fine; ma basteranno le già sviluppate per dimostrare che due ellissi di assi proporzionali hanno *tutti i loro elementi omologhi proporzionali ed egualmente inclinati*, qualora siano lineari; o *nello stesso rapporto dei quadrati degli assi*, se si tratterà di elementi di superficie.

Queste medesime proprietà, applicabili alle iperboli, si dimostrerebbero in un modo affatto analogo.

Si scorge inoltre, 1.° Che due iperboli simili, con gli assi nella stessa direzione, *hanno li stessi assintoti*, poichè $\frac{B}{A}$ e $\frac{b}{a}$ esprimono le tangenti

trigonometriche degli angoli che queste rette fanno con gli assi delle x.

2.° Che *due iperboli equilatere sono sempre simili*, poichè i rapporti $\frac{B}{A}$ e $\frac{b}{a}$ sono eguali l'uno e l'altro all'unità.

224. Due Parabole qualunque sono sempre *figure simili*.

Infatti, siano $2P$, $2p$ (fig. 132) i parametri di due parabole, che supporremo situate l'una sopra l'altra, in modo che coincidano i loro assi F ed f.

1.° Prendiamo due ascisse AP, Ap tali, che abbiasi la proporzione

$$AP : Ap :: AF : Af, \text{ o } X : x :: P : p;$$

ed indichiamo con Y, y, le due ordinate corrispondenti. Avremo le equazioni

$$Y^2 = 2P.\ X,\ y^2 = 2p.\ x;\ \text{onde}\ Y^2 : y^2 :: PX : px,$$

ma, per ipotesi,

$$X : x :: P : p;\ \text{cosichè}\ PX : px :: P^2 : p^2;\ \text{dunque}$$
$$Y^2 : y^2 :: P^2 : p^2,\ \text{o}\ Y : y :: P : p :: X : x \ldots (1);$$

e possiamo perciò conchiudere, che i tre punti A, m, M, *sono in linea retta*; e di più, che risulta

$$AM : Am :: X : x :: P : p.$$

2.° Unendo i punti F, f, con i punti M, m, si formano due triangoli simili, AFM, Afm, aventi un'angolo eguale compreso fra lati proporzionali; dunque *i raggi vettori* FM, fm, *sono paralleli*; ed abbiamo FM:fm::AF:Af:: P:p.

3.° Siano altri due punti M', m', posti sopra le due curve, come i punti M, m; otterremo

$$AM' : Am' :: P : p;\ \text{e perciò}\ AM' : Am' :: AM : Am.$$

Dunque le corde MM', mm', sono parallele e nel rapporto P : p.

Concepiamo ora iscritte agli archi AM, Am, due porzioni di poligoni, i di cui vertici M ed m, M' ed m' .... siano, due a due, in linea retta con il punto A; queste porzioni di poligoni sono simili, perchè hanno i loro lati paralleli e respettivamente proporzionali. Siegue da ciò che i loro contorni sono nel rapporto P : p, e le loro superficî nel rapporto $P^2 : p^2$.

Da questa duplice proposizione che si verifica per i limiti di questi due poligoni, avremo egualmente

$$\text{arc AM} : \text{arc} Am :: P : p, \text{ ed } AMP : Amp :: P^2 : p^2.$$

Quest' ultimo risultato si deduce ancora dall'espressione ottenuta (§ 200) per l'area di un segmento parabolico.

Abbiamo trovato

$$AMP = \frac{2}{3} X.\ Y, \quad Amp = \frac{2}{3} x.\ y; \text{ onde}$$

$$\frac{AMP}{Amp} = \frac{X.Y}{x.y}; \text{ e perciò}$$

$$\frac{AMP}{Amp} = \frac{X}{x} . \frac{X}{x} = \frac{X^2}{x^2} = \frac{P^2}{p^2};$$

e così in seguito. È da ciò che si scorge che gli elementi omologhi di due parabole qualunque, se saranno lineari, *hanno il rapporto dei loro parametri*; se poi saranno elementi di superficie, *hanno il rapporto dei quadrati di questi stessi parametri.*

235. Le ellissi e le iperboli, ottenute dal tagliare un cono (§ 137) con una serie di piani paralleli tra loro, sono curve simili.

In fatti dall' equazione generale delle sezioni coniche (§ 137) avendosi

$$y^2 = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2}\beta} \left(a \text{ sen } \beta.\ x - \text{sen } (\alpha + \beta).x^2 \right), \text{ ovvero}$$

$$y^2+\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}\cdot x^2-\frac{a\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}x=0,$$

se ne deduce $\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}=\pm\frac{B^2}{A^2}$

secondochè la curva è un' ellisse o un' iperbole.

Ma, fintantoche il piano secante resta parallelo a se stesso, l'angolo α non cangia; altronde poi β è una quantità costante, e data *a priori*. Dunque il rapporto $\frac{B}{A}$ è anch' esso costante per tutte queste ellissi o iperboli.

In quanto alle parabole, i piani che le producono sono necessariamente paralleli fra loro; ciò che può servire a confermare che due parabole qualunque sono sempre simili.

CAP. IV.

Discussione dell' equazione generale di secondo grado a due variabili. Determinazione del centro e degli assi. Considerazioni generali sulle sezioni coniche. Applicazioni di questi principii.

§ I.° *Discussione dell' equazione di secondo grado mediante la separazione delle variabili.*

226. In questo paragrafo ci proponiamo di far vedere come, dalla stessa risoluzione di un' equazione di secondo grado a due variabili, cioè a dire colla separazione delle variabili, possa dedursi la natura, la forma, ed anche la posizione, riguardo ad assi qualunque, della curva rappresentata da questa equazione. Sarà in seguito che riassumeremo la doppia trasformazione delle coordinate, mediante la quale è

sempre possibile (§§ 120, ..., 124) di ricondurre l'equazione all'una o all'altra delle due forme

$$My^2+Nx^2=P\;;\quad y^2=Qx$$

Riprendiamo l' equazione generale

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=o\ \ldots (1),$$

cui può darsi la forma

$$y^2+\frac{Bx+D}{A}y+\frac{C}{A}x^2+\frac{E}{A}x+\frac{F}{A}=o\ \ldots (2).$$

Dal risolverla rapporto ad y otteniamo

$$y=-\frac{(Bx+D)}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{[(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF]}\ \ldots (3).$$

Ciò posto, siano AX, AY (fig. 133) i due assi ai quali si suppone riferita la curva. Dando ad x una serie di valori, si otterranno per y i valori corrispondenti costruibili, purchè siano reali.

E siccome la quantità sotto il radicale, che ci dà il valore di y, è un trinomio di secondo grado in x, il di cui segno dipende principalmente da quello del primo termine, perciò convien fare, riguardo al coefficiente B^2-4AC, le tre ipotesi che sieguono:

$$B^2-4AC<o,\quad B^2-4AC=o,\quad B^2-4AC>o.$$

Prima ipotesi, $B^2-4AC<o$, o *negativo*

In questa ipotesi generale, il trinomio di secondo grado, eguagliato a zero, può dar luogo a tre casi: o le due radici di questa equazione risoluta sono *reali ed ineguali*; o sono *reali ed eguali*; o finalmente sono *imaginarie*.

Incominciando dal 1.° caso, e indicate con x', x'' le due radici, potremo dare al nostro trimonio dai principj stabiliti in algebra la forma

$$(B^2-4AC)(x-x')(x-x'')\ \ldots (4).$$

Risulta ancora per i trinomj di 2.° grado che,

per qualunque valore di x compreso fra x' ed x'' (queste due lettere rappresentano numeri reali qualunque positivi o negativi), i fattori $x - x'$, ed $x - x''$ hanno segni contrarj; dunque il loro prodotto $(x-x')(x-x'')$ è *negativo*; e siccome, per ipotesi B^2-4AC è anch' esso negativo, ne siegue che l' espressione (4), o la quantità sotto il radicale del valore di y, sia *positiva*; e perciò quest' ultimo valore è necessariamente *reale*.

Ma, dando ad x valori non compresi fra x' ed x'', i fattori $x-x'$, $x-x''$ hanno lo stesso segno; dunque il prodotto (4) è *negativo*, ed i corrispondenti valori di y sono imaginarj.

Concludiamo da tutto ciò che, se AG, AH rappresentano le radici x', x'', dal condurre per i punti G, H due parallele GG', HH' all' asse delle y, la curva avrà un' infinità di punti fra queste parallele; ma non ne avrà alcuna nè di quà nè al di là di esse. Sarà dunque la curva *limitata* da queste rette in senso positivo ed in senso negativo delle x.

Supponiamo adesso che le radici x' ed x'' siano *reali* ed eguali. In questo caso, il trinomio di secondo grado in x prende la forma

$$(B^2-4AC)(x-x')^2;$$

che, da qualunque valore di x, diverso da x', vien resa essenzialmente *negativa*, ed il valore corrispondente di y diviene per ciò *imaginario*.

Ma dal supporre $x=x'$, il radicale svanisce, e diviene il valore di $y = -\frac{(Bx'+D)}{2A}$.

Dunque, allorquando le radici x', x'', sono reali ed eguali, la curva riducesi ad *un sol punto*,

$$x = x', \; y = -\frac{(Bx'+D)}{2A}.$$

Supponiamo finalmente queste due radici *imaginarie*.

Siccome in questo caso al trimonio in x, indicato per brevità con mx^2+nx+p, può darsi la forma

$$m[(x+\frac{n}{2m})^2+k^2]\text{ , o }(B^2-4AC)[(x+\frac{n}{2m})^2+k^2],$$

essendo k^2 essenzialmente *positivo*, ne siegue che, qualunque valore diasi ad x, il segno della quantità sotto il radicale del valore di y sia negativo, e perciò questo valore di y sia *imaginario*. Dunque la curva è anch' essa *imaginaria*, cioè l' equazione (1) *non può rappresentarci cosa alcuna*.

La forma poi caratteristica, che compete alla equazione (1) nei due casi precedenti, verrà discussa fra poco.

N. B. Riflettendo al valore generale di y che non racchiude la x che nel numeratore, ed il di cui denominatore A non può esser nullo poichè allora converrebbe supporre B^2-4AC quantità positiva, veniamo a scorgere che, quando le due radici x', x'' sono reali ed ineguali, ai valori limitati di x devono corrispondere valori limitati di y. E perciò *resta la curva limitata in tutti i sensi*.

Risolvendo poi l' equazione (1) rapporto ad x, si trova un' espressione in y, la di cui quantità sotto il radicale è un trinomio di secondo grado in y, che ha B^2-4AC per coefficiente di y^2, coefficiente che, fatto eguale a zero, dà luogo a due radici, y' y'', *reali ed eguali*, allorquando x', x'', sono anch' esse reali ed ineguali; perchè, altrimente, sarebbe la curva imaginaria, ovvero si ridurrebbe ad un sol punto; ciò che è contro l' ipotesi. Questi valori y', y'', essendo costruiti e rappresentati da AK, AL, guidando per i punti K ed L due parallele KK', LL', all' asse delle x, vengono ad ottenersi i limiti della curva nel senso delle y; cosichè la

curva resta racchiusa interamente dal parallelogrammo NIRS.

Seconda ipotesi $B^2-4AC=o$.

Da questa ipotesi la quantità sotto il radicale vien ridotta ad una espressione di primo grado in x; e, chiamando x' la radice che abbiamo da questo binomio eguagliato a zero, potrà esso ricevere la forma

$$2(BD-2AE)(x-x').$$

Possiamo ancor quì trovarci in tre circostanze: o il coefficiente BD—2AE è *positivo*, o è *negativo*, o è *eguale* a zero.

Nella prima supposizione, si vede che, da qualunque valore di x maggiore di x', il fattore $x-x'$, e perciò $2(BD-2AE)(x-x')$, vien reso *positivo*; mentre che sarà reso *negativo* da qualunque valore di $x<x'$. Dunque, se AG (fig. 133) rappresenta questo valore di x', che può altronde essere tanto positivo che negativo, guidando dal punto G la GG' parallela ad AY, la curva si estenderà *indefinitamente* a destra di questa parallela, ma non avrà alcun punto alla sua sinistra, poichè, se dai valori di x eguali ad AG o maggiori di AG vengono resi reali i corrispondenti valori di y, si troveranno questi imaginarj per i valori di $x<AG$.

La conseguenza essendo affatto contraria, nella supposizione che il coefficiente BD—2AE fosse *negativo*, converrebbe dire che la curva si estenderebbe allora *indefinitivamente* nella direzione delle x negative, mentre che verrebbe limitata, nella direzione delle x positive, dalla parallela AG.

Se fosse $BD-2AE=o$, e nel tempo stesso

$$B^2-4AC=o,$$

si ridurrebbe il valor generale di y ad

$$y = -\frac{(Bx+D)}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(D^2-4AF)} \ldots (5),$$

ad un' equazione di primo grado in x, che allora esprime *un sistema di due rette parallele*; poichè il coefficiente di x è il medesimo nell' equazione delle due rette.

Sia $D^2-4AF=0$ un caso particolare dell' attuale supposizione. I due valori si riducono al solo

$y = -\frac{(Bx+D)}{2A}$, e la curva ad *una sola linea retta*.

Finalmente, se fosse $D^2-4AF<0$, le due rette parallele sarebbero *imaginarie*; cioè, con altra espressione, l' equazione (5) *non rappresenterebbe cosa alcuna*.

Terza ipotesi $B^2-4AC>0$.

Qui, come nella prima ipotesi, possono presentarsi tre circostanze principali: o i valori x', x'', del trinomio di secondo grado in x, reso eguale a o, sono *reali* ed *ineguali*, o *reali* ed *eguali*, o *imaginarj*.

Nella prima supposizione, potendo questo trinomio ricever la forma

$$(B^2-4AC)(x-x')(-x'') \ldots (6),$$

qualunque valore, di x, compreso fra x' ed x'', rendendo contrarj i segni dei due fattori $x-x'$, $x-x''$, renderà contrario il loro prodotto, per lo che anche il prodotto precedente verrà reso *negativo*; e perciò il corrispondente valore di y *è imaginario*. Ma da un qualunque valore di x, non compreso fra x' ed x'', poichè i fattori $x-x'$, $x-x''$, conservano un' egual segno, avremo dunque il loro prodotto e perciò anche il prodotto (6) positivo, e risulterà reale il corrispondente valore di y.

Siegue da ciò che, rappresentando sempre GG', HH' le parallele all' asse delle y, guidate dalle distanze $AG=x'$, $AH=x''$, la curva non avrà alcun punto fra queste due parallele, ma *si estenderà indefinitamente a destra ed a sinistra di queste parallele.*

Se le due radici x', x'' sono reali ed eguali, il trinomio in x prende la forma $(B^2-4AC)(x-x')^2$ ed il valore generale di x si riduce ad

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{x-x'}{2A}\cdot\sqrt{(B^2-4AC)},$$

equazione che rappresenta *un sistema di due linee rette* che si tagliano; poichè il coefficiente di x è per l' una

$$\frac{-B+\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A}, \text{ e } \frac{-B-\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A}$$

per l' altra.

Quando le radici x', x'' sono imaginarie, il trinomio in x, che può scriversi così

$$(B^2-4AC)\left[\left(x+\frac{n}{2m}\right)^2+k^2\right],$$

resta positivo, qualunque valore si dia ad x; e perciò i corrispondenti valori di y sono sempre reali; e la curva *si estende ancora indefinitamente in tutt' i sensi.*

Dalla precedente discussione risulta che le curve di secondo grado possono essere divise in tre classi ben distinte: Curve *limitate in tutti i sensi*: Curve *limitate in un sol senso*: e Curve *illimitate* o *indefinite in tutti i sensi.*

La prima classe comprende, come varietà, *un punto* o *una curva imaginaria*; la seconda, *un sistema di due rette parallele*, *una sola retta*, o *due rette imaginarie*; finalmente la terza *un sistema di due rette che si tagliano.*

Questi risultati corrispondono a quanto si disse (§ 125).

227. Un caso solo sembra escluso dalla precedente classificazione; e questo è quello in cui *i quadrati delle variabili non hanno luogo nell'equazione*. Ma, questa prendendo allora la forma

$$Bxy+Dy+Ex+F=o,$$

è evidente che, da qualunque valore di x, verrà sempre reso reale quello di y; ciò che rende la curva necessariamente illimitata.

Infatti, la quantità B^2-4AC, riducendosi a B^2, è essenzialmente *positiva*; dunque la curva è della terza classe.

Sarà in seguito che vedremo in qual situazione sono gli assi riguardo alla curva, in questo caso particolare.

L'equazione se fosse priva del termine in y^2, potrebbe risolversi rapporto ad x, come fu risoluta rapporto ad y, e la discussione sarebbe la stessa. Si vede poi che la curva è della *terza classe*, poichè B^2-4AC si riduce ancora a B^2.

228. Potrà esser' utile il conoscere la forma che caratterizza l'equazione generale (1) allorquando deve appartenere ad una varietà delle tre classi.

Incominciamo dal prendere in considerazione la prima e la terza classe.

Se le due radici x' ed x'' si suppongono *reali ed eguali*, il valore di y diviene

$$y=-\frac{(Bx+D)}{2A}\pm\frac{x-x'}{2A}.\sqrt{(B^2-4AC)};$$

o, togliendo il denominatore e trasportando la parte razionale,

$$2Ay+Bx+D=\pm(x-x')\sqrt{(B^2-4AC)};$$

ovvero, innalzando al quadrato e trasportando tutti i termini nel primo membro,

$$(2Ay+Bx+D)^2-(B^2-4AC)(x-x')^2=o..(M).$$

Dall' effettuare i calcoli e sostituire ad x' il suo valore, si troverebbe necessariamente la proposta, poichè con queste trasformazioni non si è che ricomposta la nostra equazione.

Fissato ciò, se B^2-4AC è *negativo*, il primo membro dell' equazione (M) esprime allora *la somma di due quantità essenzialmente positive*, somma che non può essere eguale a o, a meno che non sia separatamente

$$2Ay+Bx+D=o, \quad x-x'=o;$$

espressioni che ci darebbero

$$x=x', \quad y=-\frac{Bx'+D}{2A}.$$

Perciò la curva si riduce ad *un punto* quando il primo membro è *la somma di due quantità positive*, ciascuna delle quali è funzione di x, y; e reciprocamente.

Ma, se B^2-4AC è *positiva*, il primo membro dell' equazione (M) potrà riguardarsi come *differenza di due quadrati*, e perciò *decomponibile nel prodotto di due fattori di primo grado in* x *ed* y, cioè:

$$2Ay+Bx+D+(x-x')\sqrt{(B^2-4AC)}, \text{ e}$$

$$2Ay+Bx+D-(x-x')\sqrt{(B^2-4AC)},$$

da' ciascuno de' quali, fatto separatamente eguale a zero, si otterrà per luogo geometrico una linea retta.

Queste due rette si tagliano, perchè il coefficiente di x è necessariamente diverso nelle due equazioni. Perciò, la curva si riduce ad *un sistema di due rette che si tagliano*, quando il primo membro della proposta equazione *è la differenza di due qua-*

drati, ciascuno de' quali è funzione di x, y; e reciprocamente.

Siano adesso x' ed x'' imaginarie, essendo *negativa* la B^2-4AC. Il trimonio di secondo grado, in x, che ci dà il valore generale di y, divenendo, come si è veduto più in alto,

$$(B^2-4AC)\left[\left(x+\frac{n}{2m}\right)^2+k^2\right],$$

ne siegue che, con analoghe trasformazioni a quelle di sopra, potrà darsi alla proposta la forma

$$(2Ay+Bx+D)^2-(B^2-4AC)\left(x+\frac{n}{2m}\right)^2-(B^2-4AC)k^2=o.$$

Ma, per ipotesi, B^2-4AC è negativa. Dunque l'addotta espressione è *la somma di tre quadrati essenzialmente positivi*, l'ultimo de' quali è una quantità del tutto cognita. E perciò, non potendo questa somma giammai *annullarsi* per qualunque valore venga dato ad x ed y, non potrà esservi curva.

Dunque *la curva è imaginaria* allorchè il primo membro è *la somma di tre quadrati*, uno de' quali è una grandezza affatto nota, e reciprocamente.

Passiamo alla 2ª classe per la quale abbiamo

$$B^2-4AC=o.$$

Se si supporrà che nel tempo stesso sia

$BD-2AE=o$, si ridurrà il valore di y ad

$$y=-\frac{(Bx+D)}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(D^2-4AF)},$$

da cui deducesi

$$(2Ay+Bx+D)^2-(D^2-4AF)=o \; . \; . \; . \; . \; (N),$$

Ciò posto, può accadere che sia

$$D^2-4AF>o,\; D^2-4AF=o,\; D^2-4AF<o.$$

Nel caso primiero, il primo membro della (N) è evidentemente *la differenza di due quadrati*, e può decomporsi nei due fattori di primo grado

$$2Ay+Bx+D+\sqrt{(D^2-4AF)}, \text{ e}$$

$$2Ay+Bx+D-\sqrt{(D^2-4AF)},$$

ciascuno dei quali, fatto separatamente eguale a o, ci darà per luogo geometrico una linea retta. *Queste rette* poi *sono parallele*, perchè il coefficiente di x è il medesimo nelle due equazioni.

Ed è ciò appunto che fissa una differenza fra questa varietà della seconda classe e quella che corrisponde alla terza, vale a dire che l'uno dei quadrati, dal quale vien composto il primo membro della (N), è indipendente dalla x e dalla y.

Nel caso di $D^2-4AF=o$, la (N) si riduce a

$$(2Ay+Bx+D)^2=o;$$

cioè il primo membro della proposta è *un quadrato perfetto*, e non può rappresentare che *una retta unica*.

Finalmente, se D^2-4AF è minore di o, il primo membro della equazione (N) è *la somma di due quadrati*, uno de' quali è indipendente e dalla x e dalla y, somma che, non potendo mai divenir *nulla*, rende impossibile l'esistenza della curva.

Anche nel caso del punto abbiamo la *somma di due quadrati*, ma però ciascuno di essi, come funzione di x ed y, può essere eguale a zero separatamente.

229. La seconda classe delle curve presenta anch' essa, riguardo alla sua equazione, un carattere affatto particolare e degno di osservazione.

Li tre primi termini $Ay^2+Bxy+Cx^2$ dell'equazione generale possono, attesa la relazione

$$B^2-4AC=o, \text{ d'onde } B=2\sqrt{A}.\sqrt{C},$$

ricever la forma

$Ay^2+2y\sqrt{A}.x\sqrt{C}+Cx^2$, ovvero $(y\sqrt{A}+x\sqrt{C})^2$;

vale a dire *la loro somma costituisce un quadrato perfetto*. La proposizione reciproca è egualmente vera.

230. Fin qui non ci siamo occupati che a classificare le curve, prendendo in vista la loro estenzione. Faremo ora vedere in qual modo, data un' equazione numerica, possa costruirsi la curva che le appartiene.

Questa è una costruzione che deve ripetersi in ciascun esempio particolare, eccettuati però quelli che corrispondono alle varietà distinte, per le quali questa costruzione diviene affatto inutile.

Ripreso il valore generale di y,

$$y=-\frac{(Bx+D)}{2A}\pm\sqrt{[(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF)};$$

osserveremo che questo è composto di due parti distinte, razionale l' una e radicale l' altra. Indichiachiamo la prima con y', e figuriamoci costruita già

l'equazione $\quad y'=-\dfrac{(Bx+D)}{2A}$

che rappresenta una linea retta, di cui suol fissarsi la posizione, facendo successivamente $y=o$, $x=o$, e determinando i valori corrispondenti di x e di y.

Sia BC (fig. 133) questa retta; è evidente che, per ottenere i due valori di y corrispondenti ad un qualunque valore $x=AP$, conviene, dopo di aver guidata per il punto P una parallela all' asse delle y, che ci dà PQ per ordinata corrispondente della retta, portare nella direzione di questa retta, partendo dal punto Q, tanto superiormente che inferiormente, le due parti QM, QM' eguali al radicale; i punti M, M', ottenuti, appartengono alla curva.

Si vede che, per tal costruzione, la retta BC *ha*

la proprietà di passare in mezzo a tutte le corde della curva parallele all' asse delle y. Dunque (131) questa retta è *uno dei diametri* della curva.

Osserveremo adesso che, per la prima e terza classe, potendo il radicale ricever la forma

$$\pm\frac{1}{2A}\sqrt{[(B^2-4AC)(x-x')(x-x'')]}.$$

(x', x'' si suppongono radici reali), col supporre $x=x'$ o $x=x''$, questo radicale *si annulla*, e che i due valori di y, corrispondenti a ciascuno di questi valori di x, si riducono all' ordinata del diametro.

Dunque i punti D, E, ove le parallele GG', HH' incontrano questo diametro, appartengono anch' essi alla curva, che altronde è tangente, in questi punti, alle due parallele, poichè ciascuna di esse può riguardarsi come una secante i di cui punti d' intersecazione si riuniscono in un solo.

Allorchè, nella terza classe, le radici x', x'', sono imaginarie, il radicale non può annullarsi per qualunque valore di x, e la curva non incontra il diametro BC; ma, siccome essa deve avere tutti i suoi punti situati simetricamente riguardo questa retta, sopra le parallele all' asse delle y, convien concludere che essa è composta di due rami distinti che si estendono indefinitamente sopra e sotto il diametro BC; e così, nell' ipotesi che x', x'' siano reali, la curva vien composta da due rami che si estendono indefinitivamente a destra ed a sinistra delle due parallele GG, HH'.

Riguardo alla seconda classe, per cui il radicale si

riduce a $\pm\frac{1}{2A}\sqrt{[2(BD-2AE)(x-x')]}$, non esistendo che il valore $x=x'$ atto ad annientare questo radicale, la curva non incontra il suo diametro che nel solo punto D d' intersecazione di questo dia-

metro con la parallela GG′, alla quale la curva è tangente in D; ed allora questa curva si estende indefinitivamente sopra e sotto il diametro, tanto a destra che a sinistra della GG′, secondo che il coefficiente BD—2AE è positivo o negativo.

Questa costruzione preliminare è comune a tutte le curve delle quali abbiamo le particolari equazioni.

231. Possiamo ancora proporci di ottenere altri punti rimarcabili; come sono quelli ove la curva incontra gli assi.

Se nella $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=o$,

si farà successivamente $y=o$, ed $x=o$, avremo

$$Cx^2+Ex+F=o\,,\quad Ay^2+Dy+F=o\,;$$

e, considerando la prima di queste due equazioni, secondo che i due valori di x saranno reali ed *ineguali*, *reali* ed *eguali*, ovverò *imaginarj*, la curva incontra l'asse delle x in *due punti*, o *in un sol punto*, cioè è *tangente* all'asse delle x, o non ha *alcun punto* comune con quest'asse. Se sarà $C=o$, uno dei valori di x è *finito* e l'altro è *infinito*; il che significa che la curva incontra l'asse delle x in due punti, l'uno cioè situato *in una distanza finita*, e l'altro *in una distanza infinita*. Quando abbiasi simultaneamente $C=o$, $E=o$; i due punti d'intersecazione sono situati ambedue in distanze infinite.

Un'egual raziocinio ha luogo per l'asse delle y.

Fissati questi principj generali, passiamo ad alcune applicazioni.

Supporremo in queste, per maggior semplicità, gli assi rettangolari, benchè le costruzioni sarebbero analoghe nel caso degli assi obliqui.

Prima classe. *Curve limitate in ogni senso*, o *Ellissi*.

232. Abbiasi un *primo esempio* nella equazione

$$y^2-2xy+3x^2+2y-4x-3=o\ .\ .\ .\ (1),$$

o, ordinando riguardo ad y,

$$y^2-2(x-1)y=-3x^2+4x+3, \text{ onde}$$

$$y=x-1\pm\sqrt{(-2x^2+2x+4)} \ldots (2).$$

Il trinomio sotto il radicale, eguagliato a o, ci dà

$$x^2-x-2=o\text{ ; cioè } x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{9}=\frac{1\pm3}{2};$$

onde $x=2$, $x=-1$; ed il valore di y si riduce ad

$$y=x-1\pm\sqrt{[-2(x+1)(x-2)]} \ldots (3).$$

Esiste dunque la curva; limitata bensì dalle rette LL', MM' (fig. 134) guidate parallelamente all' asse delle y nelle distanze AG, AH, respettivamente eguali a -1 e $+2$.

Costruzione del diametro, $y'=x-1$.

Per $y'=o$, si trova $x=1$; e per $x=o$ $y=-1$. Dunque questo diametro passa per i punti, C e B, per i quali AC=1, AB=−1.

I punti I ed I' ove il diametro incontra le parallele LL' MM', appartengono ancora essi alla curva che tocca altronde le parallele in questi punti, poichè, per l' ascissa di ciascuno di questi punti, le due ordinate della curva si riducono a quella del diametro.

Si supponga successivamente $x=o$; $y=o$ nell' equazione (1), e questa diverrà

$$y^2+2y-3=o\text{, onde } y=-1\pm\sqrt{4}\text{, o } y=1,\ y=-3,$$

ed $$x^2-\frac{4}{3}x-1=o\text{, onde } x=\frac{2}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{13}.$$

I due primi punti ($x=o$, $y=1$) ed ($x=o$, $y=-3$) si costruiscono facilmente, prendendo, sopra l' asse delle y, le distanze AD=1, AD'=−3 e i punti D, D', apparterranno alla curva.

In quanto agli altri due punti

$(y=o\ ,\ x=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{13})$, $(y=o\ ,\ x=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{13})$,

convien valutare per approssimazione la $\sqrt{13}$; si trova $\sqrt{13}=3,6$ *mancante meno di un decimo*; ciò che dà $x=1,8$ ed $x=-0,5$.

Prendendo dunque sull' asse delle x due parti $AE=1,8$, $AE'=-0,5$, avremo E, E' per i due nuovi punti della curva.

E siccome deve questa passare per i sei punti D, D', E, E', I, I', ed essere tangente alle due parallele LL', MM', potremo perciò riguardarla come a bastanza determinata tanto riguardo alla forma che alla posizione.

Tuttavia, dal risolvere la (1) riguardo ad x, otterremo

$$x=\frac{y+2}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{(-2y^2-2y+13)}.$$

Sia FF' il nuovo diametro corrispondente ad

$$x'=\frac{y+2}{3};$$

otterremo i limiti della curva nel senso delle y, ponendo $-2y^2-2y+13=o$; cioè

$$y=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{27}=\frac{-1\pm5,2}{2}=2,1 \text{ e } -3,1.$$

Portando ora sull' asse delle y due parti $AK=2,1$ ed $AK''=-3,1$; e poi guidando per i punti K, K'' due parallele KK' e K'' K''' all' asse delle x, verranno ad ottenersi i limiti che si richiedono; i punti F, F', ove queste due parallele incontrano il secondo diametro costruito, sono altronde i due punti di contatto della curva con queste parallele.

Secondo esempio. $y^2+2xy+3x^2-4x=o\ldots(1)$.

Da questa equazione si deduce

$$y = -x \pm \sqrt{[(-2x(x-2)]}.$$

Il diametro passa per l'origine e fa con l'asse delle x un'angolo di 150°; si otterrà col prendere AR$=1$ (fig. 135), e coll'innalzare una perpendicolare RO$=-1$, e poi unire i punti A ed O.

Siccome $x=o$ ed $x=2$ annientano il radicale, ne siegue che la curva incontra il suo diametro nel punto I corrispondente all'ascissa AG $=2$.

Facciamo nella equazione (1), $y=o$, e poi $x=o$;

avremo $3x^2-4x=o$; onde $x=o$, $x=\frac{4}{3}$ ed $y=o$.

Viene indicato da questi due valori di x che la curva passa per l'origine e per il punto E per il

quale si ottiene AE$=\frac{4}{3}$.

Dall'espressione poi $y^2=o$, d'onde $y=o$; $y=o$, viene indicato che l'asse delle y è tangente alla curva nel punto A; il che già si sapeva, poichè AY è uno dei limiti.

Dal risolvere la (1) riguardo ad x, dedurremo

$$x = \frac{(y-2)}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{[(-2(y^2+2y-2)]}.$$

Sia FF' il diametro corrispondente ad $x' = -\frac{(y-2)}{3}$;

ne dedurremo da $y^2+2y-2=o$, $y=-1\pm\sqrt{3}$, cioè $y=o$, 7 ed $y=-2$, 7, mancante meno di un decimo.

Dunque se sopra AY si prenderà AK$=o$, 7, AK''$=-2$, 7, guidando le parallele KK', K''K''', i punti F, F', ove queste parallele incontrano il secondo diametro, sono nuovi punti della curva la quale viene ad essere bastantemente determinata riguardo alla forma e posizione, poichè deve passa-

re per i punti A, F, E, I, F', ed è tangente alle quattro rette AY, GI e KK', K''' K''''.

Terzo esempio. $y^2-2xy+2x^2-3x+2=0$.

Da questa equazione si ottiene

$$y=x\pm\sqrt{(-x^2+3x-2)}=x\pm\sqrt{[-(x-1)(x-2)]}.$$

Il diametro è una retta AE (fig. 136) che passa per l'origine, e fa con l'asse delle x un'angolo di 50°; i limiti della curva sono due parallele all' asse delle y, condotte dalle distanze AG=1, AH=2; e la curva è tangente a queste parallele nei punti D, E.

Le ipotesi $y=0$, ed $x=0$, introdotte nell'equazione, danno $x^2-3x+2=0$, $y^2+2=0$: equazioni di radici imaginarie, ciò che prova che la curva non incontra gli assi.

Si potrebbero qui, come ne' due precedenti esempj, determinare i due limiti nel senso delle y; ma ci prevarremo piuttosto di un' altra costruzione applicabile a tutte le curve della prima classe.

È fondata questa costruzione sulla proprietà (§ 162) che ha la curva, se si formi un parallelogrammo su di un sistema di diametri conjugati, di essere tangente ai quattro lati di questo parallelogrammo.

Dopo ciò, poichè DE rappresenta un diametro nella sua direzione e grandezza, il punto medio O di DE è il *centro* della curva. Questo punto ha per ascissa AI o $\frac{AG+AH}{2}$, cioè, $\frac{x'+x''}{2}$, rappresentando x' ed x'' le due radici dell'equazione $x^2-3x+2=0$, ossia quelle del trimonio sotto il radicale uguagliato a zero; ma, la proprietà delle equazioni di secondo grado (t.° 1.° pag. 181) ci dà $x'+x''=3$, coefficiente del secondo termine preso con segno contrario; dunque $\frac{x'+x''}{2}$ o $AI=\frac{3}{2}$; ciò

che ci si rende ancora evidente da AG $=1$ ed AH $=2$.

Per altra parte, siccome DE divide in due parti eguali tutte le corde parallele ad AY, ne siegue che IO rappresenti in direzione il diametro conjugato di DE; dunque, facendo $x=\frac{3}{2}$, nella espressione $\sqrt{(-x^2+3x-2)}$, il risultato sarà il valore del semidiametro conjugato.

Da questa ipotesi abbiamo

$$\sqrt{\left(-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}-2\right)}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

Perciò, se dal punto N si prenderanno due parti $ON=\frac{1}{2}$ ed $ON'=-\frac{1}{2}$, si otterrà $NN'=1$ per diametro conjugato di DE; ed il parallelogrammo LL' M'M, costruito sopra queste due rette, è tale, che la curva dev'essere tangente a questi lati, e nei loro punti medj D, E, N, N'.

Questa costrnzione è addattata per darci un' idea assai distinta della forma è della estensione della curva.

Nelle figure relative ai due primi esempj abbiamo delineato questo stesso parallelogrammo.

Nel primo esempio, ove vi si presenta il radicale

$$\sqrt{[(-2(x^2-x-2)]},$$

abbiamo per l'ascissa del centro $\frac{x'+x''}{2}=\frac{1}{2}=AR$ (fig. 134), e per il valore corrispondente di ON, $ON=\sqrt{\left(-2\times-\frac{9}{4}\right)}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$, onde $NN'=3\sqrt{2}$.

Dal secondo esempio, che ha per radicale $\sqrt{[-(x^2-2x)]}$ risulta per l'ascissa del centro

$\frac{x'+x''}{2}=1$, e per il valore di ON (fig. 135)

$$ON=\sqrt{\quad -2\times-1\ )}=\sqrt{2};\ \text{onde}\ NN'=2\sqrt{2}.$$

Ci serviamo di tal costruzione per evitare la determinazione dei due limiti nel senso delle y, e principalmente nel caso in cui la curva non incontra gli assi.

Del rimanente poi, si otterranno gli altri punti della curva col solo dare de' valori particolari ad x è costruire i corrispondenti valori delle y.

234. Servano di esercizio gli esempj che sieguono.

$$1.^{\circ}\ y^2+2xy+2x^2-2y-5x+1=0;$$

la curva è un' ellisse tangente all' asse delle y che forma allora uno dei limiti.

$$2.^{\circ}\ 4y^2-2xy+x^2-8y+4x+4=0;$$

la curva è un' ellisse tangente ai due assi coordinati:

$$3.^{\circ}\ 4y^2+2x^2+4y-4x-5=0;$$

la curva è un' ellisse riferita ad un sistema di assi paralleli *ai suoi assi principali*, poichè manca nell' equazione il termine in $x\ y$:

$$4.^{\circ}\ y^2+x^2-3y+2x+1=0;$$

sebbene questa equazione, discussa con il metodo precedente, si trovi appartenere ad una curva rientrante e chiusa, pure dal confrontarla con la forma generale dell' equazione del cerchio (§ 47), si conoscerà esser quella di *un cerchio*:

$$5.^{\circ}\ y^2-4xy+5x^2-2y+5=0;$$

quì la curva si riduce ad *un punto*, poichè (§ 228) l' equazione può ricever la forma

$$(y-2x-1)^2+(x-2)^2=0:$$

6.° $y^2-2xy+2x^2-2x+4=o$;

la curva è *imaginaria*, riducendosi l'equazione ad

$$(y-x)^2+(x-1)^2+3=o.$$

SECONDA CLASSE.

Curve illimitate in un sol senso, o Parabole.

235. *Primo esempio*:

$$y^2-4xy+4x^2+2y-7x-1=o\ldots(1).$$

[I tre primi termini $y^2-4xy+4x^2$ formano (229) un quadrato perfetto $(y-2x)^2$].

L' addotta equazione riducendosi ad

$$y^2-2(2x-1)y=-4x^2+7x+1,$$

ci dà, risolvendola,

$$y=2x-1\pm\sqrt{(3x+2)}.$$

Facendo $y'=2x-1$, si trova, per $y'=o$, $x=\frac{1}{2}$, e, per $x=o$. $y'=1$; dunque il diametro vien rappresentato dalla retta BC (fig 137), guidata per i punti B, C, per i quali abbiamo AB$=-1$, AC$=\frac{1}{2}$.

Siccome l'ipotesi $3x+2=o$, d'onde $x=-\frac{2}{3}$, annienta il radicale e riduce così le due ordinate della curva a quella del diametro; ne siegue che la retta GG' condotta nella distanza AG$=-\frac{2}{3}$ parallelamente all' asse delle x, sia il limite della curva; e

che il punto D, ove questa parallela incontra il diametro, sia quello ove essa è tangente alla curva che deve, partendo da questo punto, estendersi indefinitamente sopra e sotto il suo diametro nel senso delle x *positive*.

Facciamo successivamente nella equazione (1);

$$y=o \text{ ed } x=o \text{; e ne risulterà}$$

$$4x^2-7x-1=o\text{, ed } y^2+2y-1=o.$$

La seconda, che è la più semplice, ci dà

$$y=-1\pm\sqrt{2};$$

ora, avendosi nella figura AB$=-1$, basta evidentemente di portare sopra AY, partendo dal punto B, due distanze BK, BK′, eguali alla $\sqrt{2}$ o BH, (supponendo AH$=2$AC$=1$); ed i punti K, K′ appartengono alla curva.

In quanto alla prima, si trova

$$x=\frac{7\pm\sqrt{65}}{8}=\frac{15}{8}\text{, e }-\frac{1}{8}\text{, per approssimazione.}$$

Prendendo dunque AI$=1+\frac{7}{8}$, ed AI′$=-\frac{1}{8}$, si ottengono I, I′ per due nuovi punti della curva, che si trova a bastanza determinata riguardo alla forma e posizione; poichè passa per i cinque punti K, I′, D, K′, I, ed inoltre dev' esser tangente alla GG′.

Niente però c' impedisce di ottenere altri nuovi punti della curva, dando ad x valori particolari, e costruendo i corrispondenti valori delle y.

Può costruirsi egualmente il limite nel senso dell' asse delle y, risolvendo l'equazione rapporto ad x.

Secondo esempio: $y^2-2xy+x^2-4y+x+4=o$.

Abbiamo da questa equazione $y=x+2\pm\sqrt{3x}$.

Il diametro passa per i punti B, C, (fig. 138),

per i quali abbiamo $AB=2$. $AC=-2$, e fà con l' asse delle x un' angolo di 50°.

Di più, siccome l' ipotesi di $x=o$ annienta il radicale, ne siegue che l' asse delle y sia il limite della curva, e sia ad essa tangente nel punto B. Ciò che ci si rende ancor manifesto facendo nella equazione $x=o$; si trova in fatti

$$y^2-4y+4=o,\ o\ (y-2)^2=o;\ \text{onde}$$

$$y=2,\qquad y=2.$$

Suppongasi $y=o$, nella stessa equazione, ed avremo

$$x^2+x+4=o,$$

le di cui radici sono evidentemente *imaginarie*; il che prova che la curva non incontra l'asse delle x.

Per ottenere dei nuovi punti, facciamo $x=AP=1$; e ne risulterà $y=3\pm\sqrt{3}$; dunque, se porteremo sopra la retta PQ, partendo dal punto Q, due distanze QM, Qm eguali alla $\sqrt{3}$ o 1, 7, li due punti M, m, apparterranno alla curva.

Sia ancora $x=3$; ed avremo $y=5\pm\sqrt{9}=5\pm3$. Perciò, presa $AP'=3$, e portate sopra P'Q', partendo dal punto Q', due distanze Q'M', Q'm' eguali a 3, avremo due nuovi punti M', m'. E la curva resta così determinata a bastanza.

236. Osserveremo tuttavia che, siccome dalla discussione risulta che le due rette BE, BY formano *un sistema di assi conjugati*, se si conoscesse il parametro spettante a questo sistema, la curva potrebbe costruirsi con il processo del n.° 210.

Ora, rappresentando questo parametro con $2p'$, avremo $2p'=\frac{\overline{MQ}^2}{BQ}$, essendo MQ e BQ le coordinate del punto M riferite a questo sistema; ma abbiamo ora trovato che, per $AP=1$, $MQ=\sqrt{3}$; ed altronde, il triangolo rettangolo BHQ ci dà

$$BH \text{ o } AP = BQ . \cos QBH ,$$

ovvero, siccome dalla tang $QBH = 1$ si hà

$$\cos QBH = \frac{1}{\sqrt{(1+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad AP = BQ . \frac{1}{\sqrt{2}};$$

e perciò $BQ = AP . \sqrt{2} = \sqrt{2}$; onde finalmente

$$2p' = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Questa stessa osservazione è applicabile a tutte le curve della *seconda classe*.

237. Proponiamo per esercizio i seguenti esempj:

$$1.° \quad y^2 + 2xy + x^2 - 6y + 9 = 0 ;$$

la curva è una parabola che ha per limite l'asse delle y, e che si estende indefinitamente nel senso delle x negative:

$$2.° \quad y^2 - 3y + 5x - 2 = 0 ;$$

la curva è una parabola riferita ad un sistema di assi paralleli ai *suoi due assi principali*, e si estende indefinitamente nel senso delle x negative:

$$3.° \quad y^2 + 6xy + 9x^2 - 2y - 6x - 15 = 0 ;$$

la curva si riduce ad un sistema di due rette parallele, perchè l'equazione può (§ 228) essere così trasformata

$$(y + 3x + 3)(y + 3x - 5) = 0 :$$

$$4.° \quad y^2 - 4xy + 4x^2 + 2y - 4x + 4 = 0 ;$$

avremo qui un sistema di due rette *imaginarie*, riducendosi l'equazione ad

$$(y - 2x + 1)^2 + 3 = 0 :$$

$$5.° \quad y^2 - 2xy + x^2 + 6y - 6x + 9 ;$$

il luogo è *una retta unica*, cangiandosi l' equazione in $(y-x+3)^2=0$.

TERZA CLASSE.

Curve indefinite in tutti i sensi, o Iperboli.

238. Primo esempio:

$$y^2+2xy-2x^2-4y-x+10=0 \quad . \quad . \quad . \quad .(1).$$

Da questa equazione abbiamo $y=-x+2\pm\sqrt{(3x^2-3x-6)}$, o, decomponendo il trinomio in x,

$$y=-x+2\pm\sqrt{[3(x+1)(x-2)]}.$$

Sia BC (fig. 139) il diametro corrispondente ad $y'=-x+2$. Le parallele CC', GG' all' asse delle y, condotte dalle distanze AC $=2$, AG $=-1$ sono tangenti alla curva nei punti C ed F; di più, sono tali che non comprendono dentro di loro alcun punto della curva la quale si estende indefinitamente a destra ed a sinistra di queste due parallele. Facendo nella equazione (1) $y=0$, poi $x=0$, si trova

$$2x^2+x-10=0 \quad \text{ed} \quad y^2-4y+10=0.$$

Dalla prima si deduce

$$x=-\tfrac{1}{4}\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{81}=\frac{-1\pm9}{4}=2 \text{ e } -\tfrac{5}{2};$$

ciò che prova che la curva incontra l' asse delle x nei punti C e D per i quali AC $=2$, AD $=-2\tfrac{1}{2}$.

Dalla seconda risultano valori imaginarj; e perciò la curva non incontra l' asse delle y.

Potrebbero ottenersi nuovi punti, dando particolari valori ad x; ma il riflesso che siegue ci somministra un' espediente per determinare con pre-

cisione la forma e le dimensioni della curva: il radicale del valore di y riducesi a $\sqrt{3}.\sqrt{(x^2-x-2)}$.

Ma, estraendo la radice quadrata da x^2-x-2), si trova (t.° 1.° § 97) per i due primi termini, $x-\frac{1}{2}$, e, per i termini successivi, espressioni frazionarie con numeratori costanti e con denominatori costituiti dalle successive potenze x, x^2, x^3, ... Se l'unione di queste espressioni verrà rappresentata da $\frac{K}{x}+\frac{K'}{x^2}+\ldots$, potremo dare al valore generale di y la forma

$$y=-x+2\pm\sqrt{3}(x-\tfrac{1}{2}+\frac{K}{x}+\frac{K'}{x^2}+\ldots).$$

Ciò posto, si scorge che, a misura che aumenta x, la quantità $\frac{K}{x}+\frac{K'}{x^2}+\ldots$ diminuisce; cosichè questa somma, dal supporre x maggiore di qualunque quantità data, diviene minore di qualsisia assegnata grandezza. Dunque, ponendo

$$y''=-x+2\pm\sqrt{3}\,(x-\tfrac{1}{2}),$$

equazione che rappresenta il *sistema di due linee rette*, poichè y'' ed x vi entrano al primo grado, dovremo riguardare questo sistema come quello di *due assintoti* della curva. In fatti, si è ora veduto che la differenza $y-y''$, fra le ordinate della curva e quelle delle due rette, diminuisce senza fine e può divenir così piccola quanto si vuole. Potremo costruire un tal sistema, facendo successivamente $y=0$ ed $x=0$, nella sua equazione; ma osserveremo piuttosto che dalla addotta equazione, confrontata con quella del diametro $y'=-x+2$, rilevasi che le ordinate dei due assintoti divengono eguali a quella del diametro qualora si faccia

$x - \frac{1}{2} = 0$, cioè $x = \frac{1}{2}$; dunque esse incontrano il diametro in uno stesso punto O, che si ottiene prendendo una distanza $AN = \frac{1}{2}$, ed innalzando dal punto N una parallela all' asse delle y.

Per fissare completamente la posizione di questi assintoti, non altro più occorre che la costruzione degli angoli che essi formano con l' asse delle x. Ora, i coefficienti di x, nella loro equazione, essendo $-1+\sqrt{3}$ per il primo, e $-1-\sqrt{3}$ per il secondo, se, dopo di aver condotta per il punto O una parallela ad AX, e dopo di aver preso, sopra questa retta, $OR = 1$, innalzeremo dal punto R una perpendicolare, e porteremo sopra di questa perpendicolare, partendo dal punto I (ove $RI = OR = 1$), due distanze IS, IS' equali a $\sqrt{3}$, ne risulterà evidentemente

$$RS = -1+\sqrt{3} \quad \text{ed} \quad RS' = -1-\sqrt{3};$$

dunque le due rette OS ed OS', ovvero LL', KK' sono gli *assintoti richiesti*.

Dovendo poi passare la curva per i punti E, D, C, ed esser tangente alle rette GG', CC'; sarà perciò la sua forma e la sua posizione determinata a bastanza.

Secondo esempio.

$$y^2 - 2xy - 3x^2 - 2y + 7x - 1 = 0.$$

Da questa equazione risulta

$$y = x + 1 \pm \sqrt{(4x^2 - 5x + 2)}.$$

Sia CB (fig. 140) il diametro $y' = x + 1$. Dal risolvere l' equazione $4x^2 - 5x + 2 = 0$, si ottengono due valori imaginarj; perciò la curva non incontra CB, ma si estende indefinitamente sopra e sotto di questo diametro.

Le ipotesi, $y = 0$ ed $x = 0$, introdotte nella equazione, danno altronde luogo alle

$$3x^2-7x+1=0\,,\quad y^2-2y-1=0\,;$$

d' onde si deduce,

$$1.^\circ\ x=\tfrac{7}{6}\pm\tfrac{1}{6}\sqrt{37}=\tfrac{13}{6}\ \text{ed}\ \tfrac{1}{6}\,,$$

per approssimazione; 2.° $y=1\pm\sqrt{2}$.

Prendendo dunque sopra l' asse delle x $AD'=2\frac{1}{6}$, $AD=\frac{1}{6}$; e sopra l' asse delle y, $BE=\sqrt{2}$, $BF=-\sqrt{2}$, d' onde $AE=1+\sqrt{2}$, ed $AF=1-\sqrt{2}$, otterremo quattro punti D', D, E, F, per i quali deve passare la curva.

Determineremo adesso gli assintoti. La radice quadrata di $4x^2-5x+2$ essendo $2x-\frac{5}{4}+\frac{K}{x}+\frac{K'}{x^2}+\ldots$, avremo, per il sistema dei due assintoti, l' equazione

$$y''=x+1\pm\left(2x-\tfrac{5}{4}\right).$$

Queste rette si tagliano sopra il diametro $y'=x+1$, nel punto per il quale si ottiene

$$2x-\tfrac{5}{4}=0\,,\ \text{d' onde}\ x=\tfrac{5}{8}\,.$$

Sia $AN=\frac{5}{8}$; guidando dal punto N una parallela ad AY, il punto O, ove questa parallela taglia CB, sarà il punto comune agli assintoti ed al diametro.

I due coefficienti della x, nella loro equazione, essendo altronde $1+2$ o 3, ed $1-2$, o -1, se prenderemo OR parallela ad AX ed eguale ad 1, ed innalzeremo dal punto R le due rette RS, RS' parallele ad AY e respettivamente eguali a 3 ed a -1, le rette OS, OS', ovvero LL', KK' sono i ricercati assintoti; e la curva che deve già passare per i punti D', D, E, F, diviene di una facile costruzione almeno approssimativamente.

239. La considerazione degli assintoti essendo importantissima nella discussione delle curve di terza classe, indicheremo perciò la maniera di determinarle per mezzo dell' equazione generale.

Abbiamo trovato (§ 226) per il valore generale di y

$$y=-\frac{(Bx+D)}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{[(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF]}.$$

Siccome B^2-4AC vien supposto qui positivo, niente osta di poter estrarre la radice quadrata dal trinomio sotto il radicale; la quale sarà

$$x\sqrt{(B^2-4AC)}+\frac{BD-2AE}{\sqrt{(B^2-4AC)}}+\frac{K}{x}+\frac{K'}{x^2}+\ldots$$

cosichè l' equazione del sistema dei due assintoti sarà

$$y''=-\frac{(Bx+D)}{2A}\pm\frac{\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A}\left(x-\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}\right).$$

Dal confrontare questo risultato con l' equazione del diametro $y'=-\frac{(Bx+D)}{2A}$,

si scorge che gli assintoti si tagliano sopra questo diametro in un punto per il quale risulta

$$x-\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}=0\,;\ \text{d' onde}\ x=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}.$$

Per ottenere l' ordinata di questo stesso punto, basta sostituire ad x il valore ora trovato, nella equazione del diametro; ed avremo, a riduzione effettuata, $y'=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC}$.

Queste due coordinate non sono che quelle del *centro* della curva.

Fissata in tal guisa la posizione del punto d'in-

contro dei due assintoti, di altro non si tratta che di condurre per questo punto due rette che facciano con l' asse delle x degli angoli che abbiano per tangenti

$$a = \frac{-B+\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A}, \; a' = -B-\sqrt{(B^2-4AC)};$$

agevole costruzione, come si è veduto nei precedenti esempj.

240. 1.ª *Osservazione*. Dal moltiplicare fra loro le due espressioni di a ed a', risulta

$aa' = \frac{4AC}{4A} = \frac{C}{A}$; d' onde si scorge che, se supporremo $C = -A$, la relazione diviene $aa' = -1$; condizione di perpendicolarità di due rette.

Perciò, allorchè i due coefficienti di x^2 ed y^2, *sono eguali e con segno contrario*, nella equazione generale, i due assintoti sono *perpendicolari fra loro*, ossia l' iperbole è *equilatera*.

Reciprocamente, se l' iperbole è equilatera, avremo $aa' = -1$; d' onde $\frac{C}{A} = -1$, e $C = -A$; risultato concorde con quanto è stato già detto (§ 127).

Dobbiamo bensì osservare che queste conseguente sono soltanto esatte finchè la curva resta riferita in origine ad assi rettangolari. Giacchè, nel caso di assi obliqui, la relazione $C = -A$ non include in alcun modo la perpendicolarità degli assintoti, come possiamo esserne convinti dagli esempj particolari.

241. 2.ª *Osservazione*. Supponiamo che uno dei quadrati delle variabili manchi nella equazione generale, per esempio il termine in x^2; avremo allora $C = 0$, ed i valori di a, a' si ridurranno

ad $a = o$, $a' = -\frac{B}{A}$.

Il primo risultato dimostra che, in questo caso, uno degli assintoti è *parallelo all' asse delle x*; e l' altro che l' assintoto fa con quest' asse un' angolo che ha per tangente $-\frac{B}{A}$.

Sia, al contrario, $A = o$, nel qual caso resta priva l' equazione del termine in y^2; è allora che abbiamo $a = \frac{o}{o}$, $a' = -\frac{B}{o}$.

Questo secondo risultato indica ancora che uno degli assintoti è parallelo all' asse delle y; ma per interpretare il primo, conviene sottoporlo ad una trasformazione. Abbiamo

$$a = -\frac{B+\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A}$$

$$=\frac{[-B+\sqrt{(B^2-4AC)}][-B-\sqrt{(B^2-4AC)}]}{2A[-B-\sqrt{(B^2-4AC)}]},$$

o, effettuando i calcoli e riducendo,

$$a = \frac{2C}{-B-\sqrt{(B^2-4AC)}}.$$

Se faremo adesso $A = o$, questa espressione si ridurrà ad $a = -\frac{C}{B}$.

Ma se fosse simultaneamente $A = o$, $C = o$, le due espressioni diverrebbero $a = o$, $a' = -\frac{B}{o}$; il che prova che i due assintoti sarebbero paralleli ai due assi (ved. § 227).

Le conseguenze, che sono l'oggetto di questa osservazione, sono vere, qualunque sia l'angolo degli assi; bensì a ed a' non rappresentano più le tangenti trigonmetriche, ma i rapporti del seno.

242. Daremo fine alla discussione delle curve della terza classe con un' esempio ove l'equazione resta priva dei due quadrati in y^2 ed x^2, perchè, in questo caso, si ricorre ad un particolare artificio per fissare la posizione dei due assintoti.

Sia $xy-2y+x-1=0$ (fig. 141) l'equazione proposta (supporremo qui la curva riferita ad assi qualunque); ne dedurremo $y=\frac{-x+1}{x-2}$, o, effettuando la divisione $y=-1-\frac{1}{x-2}$.

Questo valore di y è composto di due parti, l'una costante ed eguale a -1, e l'altra che varia e diminuisce sempre più a misura che x aumenta; cosichè, quando x diviene maggiore di qualunque grandezza data, la seconda parte diviene anch'essa minore di qualunque quantità assegnata.

Ed è perciò che l'equazione $y=-1$ appartiene ad una retta *cui si approssima continuamente e quanto si può la curva senza poterla mai raggiungere*. Dunque $y=-1$ è l'equazione di un assintoto, che è allora rappresentato da una retta HH' condotta parallelamente all'asse delle x ad una distanza $AC=-1$.

Dal risolvere l'equazione rapporto ad x, troviamo

$$x=\frac{2y+1}{y+1}, \text{ o, dividendo, } x=2-\frac{1}{y+1};$$

e, con un ragionamento analogo al precedente, si proverebbe che l'equazione $x=2$ è quella di un secondo assintoto che, perciò, vien rappresentato

da una retta LL', guidata parallelamente all' asse delle y, ad una distanza $AB = 2$.

Sia ora, nella proposta, $y = 0$, poi $x = 0$, avremo

$x - 1 = 0$, cioè $x = 1$; $c - 2y - 1 = 0$, onde $y = -\frac{1}{2}$.

Prendendo dunque sopra AX ed AY due distanze $AD = 1$, $AG = -\frac{1}{2}$, otterremo D e G per due dei punti della curva.

Così potrebbero determinarsi altri punti, dando ad x valori particolari, e costruendo i valori corrispondenti di y; ma possiamo ancora prevalerci del metodo del n.° 197. Per esempio, coll' unire il punto D con il punto O ove i due assintoti si tagliano, e col prendere $OD' = OD$, avremo il punto D' spettante alla curva. Guidando ancora la retta DE, e prendendo $l'E = ID$; il punto E apparterrà alla curva. E così in seguito.

243. Ecco altri esempj relativi alla terza classe delle curve.

1.° $y^2 - 4xy + 2x^2 + 6y - 9x + 2 = 0$; equazione di un' iperbole che non incontra il suo diametro.

2.° $y^2 - 4xy + 4x + 3 = 0$; equazione di un' iperbole che ha un' assintoto parallelo all' asse delle x (ved. § 241).

3.° $y^2 - 2xy - 2 = 0$; l' iperbole è riferita al suo centro come origine; ed uno degli assintoti è parallelo all' asse delle x.

4.° $y^2 - x^2 + x = 0$. Se gli assi sono rettangolari, l' iperbole è equilatera, e vien riferita ad assi paralleli ai suoi *assi principali*.

5.° $2xy - x + 1 = 0$; iperbole riferita ad assi paralleli agli assintoti.

6.° $y^2 - 2xy + 2y + 4x - 8 = 0$: La curva riducesi ad un sistema di due rette che si tagliano; perchè si può (§ 228) trasformar l' equazione in quest' altra: $(y-2)(y-2x+4) = 0$.

244. Il metodo di discussione ora adoprato può anche applicarsi alle equazioni di un grado superiore al secondo, purchè possa effettuarsi la separazione delle variabili.

Ci limiteremo ad una sola applicazione, che basterà per mostrarci come dovrebbe agirsi in tutti i casi consimili.

Sia l'equazione $y^2-x^2y+2yx-x^3+2y+2x=0$..(1) che, sebbene del terzo grado, può risolversi riguardo ad y, e dedursene

$$y=\frac{x^2-2x-2}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(x^4+4)}\quad\ldots(2).$$

Rappresentiamo la prima parte di questo valore di y con y' (fig. 142), e costruiamo prima il luogo geometrico $y'=\frac{x^2-2x-2}{2}$.

Questa equazione riducesi ad $x^2-2x-2y'-2=0$, e dà $x=1\pm\sqrt{(2y'+3)}$; d'onde si scorge che il luogo geometrico è una parabola che ha per *diametro*, o piuttosto per *asse principale*, la retta EE', condotta parallelamente all' asse delle y, nella distanza $AP=1$; il limite poi di questa curva è la DE guidata parallelamente ad AX per il punto D, per il quale abbiamo

$$2y+3=0,\ \text{o}\ y'=-\tfrac{3}{2}=AD.$$

Dal fare $y'=0$, troviamo

$$x=1\pm\sqrt{3},\ \text{o}\ x=AQ,\ \text{ed}\ x=AQ'.$$

Sia puranche $x=0$; il valore di y' si riduce ad

$$y'=-\tfrac{2}{2}=-1;$$

onde la curva passa ancora per il punto B, per cui $AB=-1$.

La parabola corrispondente ad $y'=\frac{x^2-2x-2}{2}$

è determinata a bastanza e può rappresentarsi dalla curva RQEQ′R′.

Ora questa parabola deve essere riguardata come *un diametro* della curva cercata.

Infatti, per un qualunque valore di x, AP′, dopo di aver costruita la corrispondente ordinata P′B′ della parabola, partendo dal punto B′, convien portare, sopra e sotto di questa curva, una parte eguale al valore del radicale $\frac{1}{2}\sqrt{(x^4+4)}$. Si vede dunque che la linea RQEQ′R′ *passa in mezzo a tutte le corde della curva cercata che sono parallele all' asse delle y*. Dunque questa linea (§ 131) è un diametro.

Osservando adesso che il radicale $\sqrt{(x^4+4)}$ riducesi ad $x^2+\frac{k}{x}+\frac{k'}{x^4}+\ldots$, vediamo che all' espressione (2) può darsi la forma

$$y=\frac{x^2-2x-2}{2}\pm\frac{1}{2}(x^2+\frac{k}{x^2}\pm\frac{k'}{x^4}+\ldots);$$

e siccome, a misura che aumenta x, la somma dei termini $\frac{k}{x^2}+\frac{k'}{x^4}+\ldots$ diminuisce, somma che può divenir minore di qualunque assegnata grandezza, ne siegue che la curva cercata debba avere per assintoti il sistema delle linee rappresentate dall' equazione $y''=\frac{x^2-2x-2}{2}\pm\frac{x^2}{2}$.

Questa equazione, considerata successivamente con il segno superiore e con il segno inferiore, diviene $y''=x^2-x-1$, ed $y''=-x-1$.

La seconda di queste due è quella di una retta LL′ che passa per i due punti B, B″, per i quali AB $=-1$ ed AB″ $=-1$.

In quanto alla prima, se ne deduce

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(4y'' + 5)},$$

e, costruendola, se ne ottiene una nuova parabola SIS', che ha per asse principale II' (o $x = \frac{1}{2}$), per vertice il punto I, che ottiensi facendo

$$4y'' + 5 = 0;\ \text{d' onde}\ y'' = -\frac{5}{4} = AC.$$

Deve qui notarsi che i due assintoti LL', SIS' hanno il punto B comune e si toccano in questo punto, perchè la parte non comune della loro equazione essendo $\frac{x^2}{2}$, dal fare $x = 0$, ne risulta $y'' = -1$.

Questo stesso punto appartiene anche, come si è veduto, al diametro parabolico RB' EBR'.

Altro non ci resta che di determinare alcuni punti della curva cercata.

Facciasi in prima $y = 0$, nella equazione (1); avremo $-x^3 + 2x = 0$, o $x(x^2 - 2) = 0$; onde

$$x = 0,\quad x = +\sqrt{2},\quad x = -\sqrt{2};$$

perciò la curva passa per l' origine A, e per i punti G, G', dai quali abbiamo $AG = \sqrt{2}$, $AG' = -\sqrt{2}$.

Facciasi ancora $y = 0$; troveremo

$$y^2 + 2y = 0,\ \text{onde}\ y = 0,\ y = -2;$$

dunque la curva passa per il nuovo punto H preso sull' asse delle y, ad una distanza $AH = -2$.

Facciamo poi $x = 1$, nella (2), ed avremo

$$y = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5};$$

ciò che ci dà i nuovi punti E'', E''', dai quali abbiamo

$$AP = 1,\ PE = -\frac{3}{2},\ EE'' = \frac{1}{2}\sqrt{5},\ EE''' = -\frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Supponiamo infine $x = 2 = AP'$; e troveremo

$$y = -1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{20} \, ;$$

La costruzione di questi due punti ci dà ancora i punti K e K' per due punti della curva.

Il luogo geometrico cercato dovendo passare per i punti K , G , E'' , A ; poi K' , E''' , H , G , ed avendo per assintoti la parabola SIS' e la retta LL' , è necessariamente rappresentato dalle due linee indefinite K G E'' A T'... , G' H N' E''' K'...

N. B. Dal combinare l' equazione della curva con l' equazione $y = -x-2$ che è quella di una retta HH' parallela all' assintoto LL' e guidata dalla distanza AH $= -2$ si trova, per risultato di questa combinazione , $x^2 = 0$ ed $y = -2$; che ci fa conoscere essere la retta HH' tangente alla curva nel punto H. E ciò serve a giustificare la forma che in questo punto data abbiamo al ramo di curva G'HK'.

Così trovar potremmo che l' equazione

$$x^2y + 2xy - x^2 + y = 0$$

rappresenta una curva . come DEAD' (fig. 143), che passa per l' origine , che è tangente in questo punto all' asse delle x , e che ha per assintoti le rette $x = -1$ ed $y = 1$.

Chi fosse bramoso di estendere le sue cognizioni sopra la discussione delle curve di un grado superiore al secondo, potrà consultare l' opera di CRAMER , che ha per titolo: *Introduzione all'analisi delle linee curve.*

§ II. *Determinazione del centro e degli assi , mediante la trasformazione delle coordinate.*

245. Abbiamo veduto (§§ 120 , . . .) che può sempre una data equazione di secondo grado a due variabili essere ridotta ad una delle forme $My^2 +$

Nx^2+P, $y^2=Qx$, mediante due trasformazioni di coordinate; cioè, con un cangiamento di direzioni di assi, e poi con una traslazione di origine. Riprenderemo questa ricerca con nuovi dettagli, invertendo però l'ordine delle due trasformazioni, perchè il metodo del n.° 120 ha l'inconveniente d'introdurre le quantità irrazionali nei coefficienti di x e di y.

Essendo l'equazione delle curve di 2.° gr.

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0 \quad . \; . \; . \quad (1).$$

sostituiremo ad x ed y le formole $x=x+a$, $y=y+b$, e ci proporremo di determinare a, b, in modo da fare scomparire i termini di primo grado in x ed in y. Da questa sostituzione otterremo

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+(2Ab+Ba+D)y+(2Ca+Bb+E)x$$
$$+Ab^2+Bab+Ca^2+Db+Ea+F=0 \quad . \; . \quad (2).$$

E siccome questa equazione non racchiude più i termini lineari in x ed in y, perciò avremo

$$2Ab+Ba+D=0, \quad 2Ca+Bb+E=0 \; . \; ., \quad (3).$$

ed allora l'equazione si riduce a quest'altra

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+F'=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

I tre primi coefficienti A, B, C sono quei stessi della proposta.

In quanto ad F', abbiamo $F'=Ab^2+Bab+Ca^2+Db+Ea+F$; ma questa espressione può simplificarsi addizionando fra loro le equazioni (3) dopo di aver moltiplicato la prima per b, e la seconda per a. In fatti, troveremo così

$$2Ab^2+2Bab+2Ca^2+Db+Ea=0,$$

d'onde deducesi $Ab^2+Bab+Ca^2=-\frac{(Db+Ea)}{2}$,

e perciò, $F' = F + \frac{Db+Ea}{2}$ . . . . (5).

A questa forma ridurremo in seguito il valore di F'.

Le equazioni (3) danno poi per a, b,

$$a = \frac{2AE-BD}{B^2-4AC}, \quad b = \frac{2CD-BE}{B^2-4AC} \quad . . . . (6)$$

valori da potersi sostituire in F', se non fosse inutile.

Osserveremo adeesso che l'equazione (4), restando la stessa col cangiare x ed y in $-x$ e $-y$, è tale che, se x', y' rappresentino le coordinate di un punto qualunque M (fig. 144) della curva riferita al nuovo sistema OX', OY', nel qual caso quest' equazione è sodisfatta da x', y', essa lo sarà pur anche da $-x'$, $-y'$. Ma è evidente che i due punti (x', y'), $(-x', -y')$ sono in linea retta con la nuova origine O, ed alla stessa distanza da questo punto.

E perciò il punto O ha la proprietà di *dividere in due parti eguali tutte le corde della curva che passa per questo punto*; dunque (§ 100) la nuova origine è *il centro* della curva.

I valori in fatti di a e di b sono quei stessi già ottenuti (§ 239) per le coordinate del centro.

Concluderemo da ciò che l'equazione $Ay^2+Bxy+Cx^2+F'=0$ è la *forma caratteristica* delle equazioni di tutte le curve di secondo grado aventi un centro, allorchè vi si suppone trasportata l'origine delle coordinate.

E, siccome l'ipotesi $B^2-4AC=0$ rende le espressioni (6) infinite, ne siegue che la *parabola non ha centro*, ovvero che il suo centro è situato *all' infinito*. O, con altra espressione, non possono per la parabola eliminarsi insieme i due termini lineari in x ed in y.

M. B. Se con questa prima trasformazione di coordinate si troverà $F' = 0$, il che riduce l'equazione ad $Ay^2 + Bxy + Cx^2 = 0$,

potremo concludere che la curva si riduce *al suo centro*, o ad un sistema *di due rette che passano per il centro*.

In fatti, da questa eguazione abbiamo

$$y = -\frac{B}{2A}x \pm \frac{x}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)};$$

ove si vede che, dall'esserere $B^2 - 4AC < 0$ ovvero > 0, l'equazione sarà verificata dall'unico sistema ($y = 0$, $x = 0$), ossia che rappresenterà un sistema di due rette che passano per l'origine.

Osserveremo ancora che tutte le conseguenze precedenti sono vere, qualunque siasi l'inclinazione degli assi.

246. Supponiamo che la curva sia un'ellisse o un'iperbole, nel qual caso è sempre possibile la precedente trasformazione, e vediamo adesso come possa eliminarsi il termine in xy dalla equazione (4).

Questo calcolo fu già effettuato (§ 120) sull'equazione generale. Sostituiremo nella (4) le formole (§ 90)

$$x = x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha\,, \quad y = x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha\,,$$

per mezzo delle quali si passa da un sistema rettangolare ad un'altro sistema rettangolare, e faremo

$$2(A - C)\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha) = 0 \;\ldots\; (7)$$

poi $M = A\cos^2\alpha - B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + C\,\mathrm{sen}^2\alpha\,,$
$N = A\,\mathrm{sen}^2\alpha + B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha\,,$

$$P = -F' = -\left(F + \frac{Db + Ea}{2}\right);$$

ed allora l'equazione (4) trovasi ridotta alla forma

$$M y^2 + N x^2 = P.$$

Ma resta ancora a determinarsi l'angolo α ed i valori corrispondenti ai coefficienti M ed N. E perciò d'altro non si tratta che di riassumere i calcoli del n.° 126.

Dedurremo prima dall' equazione (7)

$$\text{tang } 2\alpha = -\frac{B}{A-C}\text{; onde}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{A-C}{\sqrt{[(A-C)^2+B^2]}},\ \text{sen } 2\alpha = \frac{-B}{\sqrt{[(A-C)^2+B^2]}}$$

Per altra parte, dall' aggiugnere e sottrarre successivamente i valori di M e di N, otterremo

$$M+N = A+C,\ M-N = (A-C)\cos 2\alpha - B\,\text{sen}\,2\alpha,$$

onde, sostituendo i valori di cos 2α, sen 2α, avremo

$$M+N = A+C,$$

$$M-N = \frac{(A-C)^2+B^2}{\sqrt{[(A-C)^2+B^2]}} = \sqrt{[(A-C)^2+B^2]}.$$

Dunque finalmente

$$M = \frac{A+C}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{[(A-C)^2+B^2]},$$

$$N = \frac{A+C}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{[(A-C)^2+B^2]}.$$

Ma, prima di applicare a degli esempj le formole precedenti, deve farsi un' osservazione sul modo di farne uso.

L'angolo 2α, essendo dato dalla formola tang $2\alpha = \frac{B}{A-C}$, è acuto o ottuso, secondo che questa tangente è *positiva* o *negativa*; ma, in am-

bedue i casi, il suo seno è *positivo*. Ora abbiamo trovato $\text{sen}\ 2\alpha = -\frac{-B}{\sqrt{[(A-C)^2+B^2]}}$, ovvero

$$\text{sen}\ 2\alpha = -\frac{-B}{\pm\sqrt{[(A-C)^2+B^2]}},$$

atteso il doppio segno da cui deve sempre essere affetto un radicale; e, ad oggetto che questa espressione resti positiva, bisogna che il radicale venga preso con il segno $+$ se B è negativo, e al contrario con il segno$-$, quando sia B *positivo*.

I valori dunque di M ed N divengono

$$M = \tfrac{1}{2}(A+C) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{[(A-C)^2+B^2]};$$

$$N = \tfrac{1}{2}(A+C) \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{[(A-C)^2+B^2]};$$

corrispondendo i segni superiori alla B *negativa* ed i segni inferiori alla B *positiva*.

247. Ciò posto, ecco il quadro delle formole delle quali dovrà farsi uso per qualunque particolare equazione che rappresenti un'ellisse o un iperbole, volendosi riferire la curva al suo centro ed ai suoi assi.

Equazione proposta,

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0.$$

1.° Eliminazione dei termini generali mediante una traslazione di origine,

$$a = \frac{2AE-BD}{B^2-4AC},\ b = \frac{2CD-BE}{B^2-4AC},\ F' = F + \frac{Db+Ea}{2}.$$

Equazione risultante, $Ay^2+Bxy+Cx^2+F'=0$.

2.° Eliminazione del termine in xy, mediante un cangiamento di direzione di assi,

$$\text{tang}\ 2\alpha = -\frac{B}{A-C},$$

$$\left.\begin{array}{l} M=\frac{1}{2}(A+C)\pm\frac{1}{2}\sqrt{[(A-C)^2+B^2]} \\ N=\frac{1}{2}(A+C)\mp\frac{1}{2}\sqrt{[(A-C)^2+B^2]} \end{array}\right\} P=-F'.$$

Équazione risultante, $My^2+Nx^2=P$.

Applicazioni a diversi esempj.

1.° $y^2-2xy+3x^2+2y-4x-3=0$;

questo è il primo esempio discusso (§ 232) per separare le variabili. Avremo

$A=1, B=-2, C=+3, D=2, E=-4, F=-3$;

cosichè, dalle formole del quadro che precede, otterremo $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, ed $F'=-\frac{9}{2}$.

Abbiasi $AC=\frac{1}{2}$, $CO=-\frac{1}{2}$; OX', OY' (fig. 144) rappresentano i nuovi assi rapporto ai quali l' equazione ha la forma

$$y^2-2xy+3x^2-\frac{9}{2}=0.$$

Troveremo poi

tang $2\alpha=-1$, $M=2+\sqrt{2}$, $N=2-\sqrt{2}$, $P=\frac{9}{2}$

(siccome è qui B *negativo*, perciò si è preso il segno superiore nelle espressioni di M ed N).

Guidata per il punto O una retta OB che formi con OX' un' angolo che abbia -1 per tangente, divideremo l' angolo BOX' in due parti eguali; e le due rette OX'', OY'' saranno i nuovi assi, rapporto ai quali l' equazione resta finalmente ridotta alla forma

$$(2+\sqrt{2})y^2+(2-\sqrt{2})x^2=\frac{9}{2}.$$

Per confrontare questa equazione coll' altra

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2,$$

*

e per dedurne i valori dei semi-assi A, e B, converrà (§ 103) moltiplicarla per

$$\frac{d}{MN}, \text{ o } \frac{9}{2(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{9}{4};$$

ed otterremo

$$\frac{9(2+\sqrt{2})}{4}y^2+\frac{9(2-\sqrt{2})}{4}x^2=\frac{81}{8};$$

d'onde deducesi

$$A=\frac{3}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})},\quad B=\frac{3}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})}.$$

O, calcolando questi valori approssimativi di 0, 1,

$$A=2,7 \text{ e } B=1,1.$$

Conosciuti questi semiassi, potremo facilmente costruire la curva la di cui posizione, rapporto agli assi primitivi, deve esser simile a quella già indicata dalla fig. 134, che corrisponde allo stesso esempio (§ 332).

$$2.^\circ\ y^2+2xy-2x^2-4y-x+10=0;$$

questo è il primo esempio della terza classe (§238).

Essendo qui B *positivo*, converrà prendere i segni inferiori nelle espressioni di M e di N.

Avremo

$A=1$, $B=2$, $C=-2$, $D=-4$, $E=-1$, $F=10$; onde $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$, $F'=\frac{27}{4}$, ed $y^2+2xy-2x^2+\frac{27}{4}=0$, si trova poi

$$\text{tang } 2\alpha=-\frac{2}{3},\ M=\frac{-1-\sqrt{13}}{2},\ N=\frac{-1+\sqrt{13}}{2},$$

e $P=-\frac{27}{4}$; ciò che ci dà per ultima trasformata

$$-\frac{(\sqrt{13}+1)}{2}y^2+\frac{\sqrt{13}-1}{2}x^2=-\frac{27}{4}, \text{ o}$$

$$\frac{\sqrt{13}+1}{2}y^2-\frac{\sqrt{13}-1}{2}x^2=\frac{27}{4}.$$

Questa equazione rappresenta ad evidenza un' iperbole riferita al suo asse *non-trasverso* come asse delle x; e ciò infatti viene indicato dalla figura 139 che corrisponde allo stesso esempio trattato al n.° 238 mediante la separazione delle variabili.

Per confrontarla con la $B^2y^2-A^2x^2=A^2B^2$(§210, si dee moltiplicarla con $\frac{27}{13-1}$, o $\frac{9}{4}$; avremo

$$\frac{9}{8}(\sqrt{13}+1)y^2-\frac{9}{8}(\sqrt{13}-1)x^2=\frac{243}{16}, \text{ e perciò}$$

$$B^2=\frac{9}{8}(\sqrt{13}+1)=5,18, \text{ onde } B=2,2;$$

$$A^2=\frac{9}{8}(\sqrt{12}-1)=2,93, \text{ onde } A=1,7.$$

Lasciamo all' esercizio de' studenti l' applicare le formole precedenti ai diversi esempj della prima e della terza classe, che sono stati trattati colla separazione delle variabili.

248. Non può seguirsi lo stesso andamento, nel caso della parabola, poichè per a, b ottengonsi valori infiniti. Non si presenta altro espediente che quello di far prima svanire il termine in xy, il che, come si è veduto (§ 106), fa prima svanire uno dei quadrati, e poi il termine in y e la quantità tutta nota, ovvero il termine in x, e la quantità tutta cognita, secondo che il coefficiente di x^2 o di y^2 si trova eguale a o.

Determiniamo le formole relative a questa doppia trasformazione di coordinate.

La relazione $B^2-4AC=0$, e $B^2=4AC$, riduce l' espressione $\pm\sqrt{[(A-C)^2+B^2]}$ all' altra

$$\pm\sqrt{(A^2-2AC+C^2+4AC)}, \text{ o } \pm(A+C);$$

dunque i valori di tang 2α, sen 2α, cos 2α, M, N, divengono

$$\text{tang}\,2\alpha = \frac{-B}{A-C}, \cos 2\alpha = \frac{A-C}{\pm(A+C)}, \text{sen}\,2\alpha = \frac{-B}{\pm(A+C)}$$

$$M = \tfrac{1}{2}(A+C) \pm \tfrac{1}{2}(A+C), N = \tfrac{1}{2}(A+C) \mp \tfrac{1}{2}(A+C)\,;$$

cioè, $M = A+C$, $N = 0$, o $M = 0$, $N = A+C$, secondo che B è *negativo* o *positivo*; poichè l'osservazione del n.° 246, relativa al segno del sen 2α, è applicabile al caso che noi consideriamo; e siccome $A+C$ è essenzialmente *positivo* nella parabola, se si vorrà che sen 2α, o $\dfrac{-B}{\pm(A+C)}$ sia sempre positivo, bisogna che $A+C$ sia affetto dal segno superiore, quando B è negativo; e dal segno inferiore, quando B è positivo.

Abbiamo altronde trovato (§ 119), per i coefficienti di x e di y nell'equazione trasformata,

$$R = D\cos\alpha - E\,\text{sen}\,\alpha,\quad S = D\,\text{sen}\,\alpha + E\cos\alpha,$$

espressioni che, a cagione di

$$\cos\alpha = \sqrt{\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)},\quad \text{sen}\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)},$$

si riducono, quando B è negativo, ad

$$R = \frac{D\sqrt{A}-E\sqrt{C}}{\sqrt{(A+C)}},\quad S = \frac{D\sqrt{C}+E\sqrt{A}}{\sqrt{(A+C)}},$$

e, quando B è positivo, ad

$$R' = \frac{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}{\sqrt{(A+C)}},\quad S' = \frac{D\sqrt{A}+E\sqrt{C}}{\sqrt{(A+C)}}.$$

Questa prima trasformazione riduce l'equazione ad

$$My^2+Ry+Sx+F=0,\ \text{o}\ Nx^2+R'y+S'x+F=0.$$

Supponendola ridotta alla prima forma, bisogna, per eliminare il termine in y e la quantità tutta nota, sostituire $x+a$, $y+b$ in luogo di x, y; che se pongasi

$$2Mb+R=0,\quad Mb^2+Rb+Sa+F=0, \text{ cioè}$$

$$b=-\frac{R}{2M},\ a=\frac{-Mb^2-Rb-F}{S}=\frac{R^2-4MF}{4MS}$$

ottiensi per ultima trasformata, $My^2+Sx=0$.

Se, al contrario, l'equazione fosse $Nx^2+R'y+S'x=0$, si troverebbe

$$a=-\frac{S'}{2N},\ b=\frac{S'^2-4NF}{4NR'} \text{ ed } Nx^2+R'y=0.$$

249. Ecco lo specchio delle formole per le applicazioni:

1.° B *negativo*: $\operatorname{tang} 2\alpha=-\frac{B}{A-C}$, $M=A+C$,

$$N=0,\ R=\frac{D\sqrt{A}-E\sqrt{C}}{\sqrt{(A+C)}},\quad S=\frac{D\sqrt{C}+E\sqrt{A}}{\sqrt{(A+C)}};$$

$$My^2+Ry+Sx+F=0.$$

$$b=-\frac{R}{2M},\ a=\frac{R^2-4MF}{4MS} \quad \text{ed } y^2=-\frac{S}{M}x.$$

2.° B *positivo*: $\operatorname{tang} 2\alpha=-\frac{B}{A-C}$, $M=0$, $N=A+C$,

$$R'=\frac{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}{\sqrt{(A+C)}},\quad S'=\frac{D\sqrt{A}+E\sqrt{C}}{\sqrt{(A+C)}},$$

$$Nx^2+R'y+S'x+F=0$$

$$a=-\frac{S'}{2N},\ b=\frac{S'^2-4NF}{4NR'}\ \ldots\ x^2=-\frac{R'}{N}y.$$

Primo esempio:

$$y^2-4xy+4x^2+2y-7x-1=0.$$

(Essendo B *negativo*, deve addottarsi il primo sistema di formole). Avremo

$A=1, B=-4, C=4, D=2, E=-7, F=-1,$

onde tang $2\alpha=-\frac{4}{3}, M=5, N=0, R=\frac{16}{5}\sqrt{5}, S=-\frac{3}{5}\sqrt{5}.$

Sopra Ax (fig. 145) prendiamo prima $AC=1$, e dal punto C innalziamo la perpendicolare $CD=-\frac{4}{3}$; guidiamo poi DAB, e dividiamo l'angolo BAX in due parti eguali; le rette AX', AY', sono i due assi rapporto ai quali l'equazione diviene $5y^2+\frac{16}{5}\sqrt{5}.y-\frac{3}{5}\sqrt{5}.x-1=0$, ed ottiensi $b=-\frac{8}{25}\sqrt{5}=-0,4$, ed $a=-\frac{356}{300}\sqrt{5}=-2,7$.

Prenderemo $AE=-2,7$ ed $EA'=-0,4$.

Le rette A'X'', A'Y'' parallele ad AX', AY', passando per il punto A', sono i nuovi assi rapporto ai quali l'equazione è infine ridotta alla forma

$$y^2=\frac{3}{25}\sqrt{5}.x.$$

Dunque il parametro è eguale a $\frac{3}{25}\sqrt{5}=0,3$; e la curva, costruita con questi dati, si trova in una situazione simile a quella della figura 105 relativa al n.° 235, ove lo stesso esempio è trattato colla separazione delle variabili.

Secondo esempio:

$$y^2+2xy+x^2-6y+9=0.$$

(Essendo B *positivo*, ci prevarremo di questo secondo sistema). Abbiamo

$A=1, B=+2, C=1, D=-3, E=0, F=9$; onde

$\text{tang}\,2\alpha=\frac{-2}{0}=\infty, M=0, N=0, R'=-3\sqrt{2}, S'=-3\sqrt{2};$

ed ottiensi per la prima trasformata,

$$2x^2-3\sqrt{2}.y-3\sqrt{2}.x+9=0.$$

Troveremo poi

$$a=\frac{3}{2}\sqrt{2},\ b=\frac{9}{8}\sqrt{2},\quad \text{ed } x^2=\frac{3}{2}\sqrt{2}.y.$$

La costruzione della curva, mediante questi risultati, può verificarsi facilmente colla separazione delle variabili.

250. Nelle applicazioni che precedono, non si è fatta parola delle diverse varietà, perchè la risoluzione immediata dall'equazione le fa facilmente emergere; ed ogni trasformazione di coordinate si rende inutile per la loro costruzione. Tuttavia, non sarà fuor di proposito l'arrestarci alcun poco sui casi particolari di *un sistema di due rette parallele*.

Abbiamo veduto (§ 226) che questa varietà è caratterizzata dalle due condizioni

$$B^2-4AC=0,\quad BD-2AE=0\ .\ .\ .\ (1).$$

Ciò posto, dalla prima abbiamo $B=\pm 2\sqrt{A}\times\sqrt{C}$,

cioè $B=-2\sqrt{A}\times\sqrt{C}$, se B è *negativo*,
e $B=+2\sqrt{A}\times\sqrt{C}$, se B è *positivo*.

Ammettendo la prima ipotesi, sostituiremo a B il suo valor nella $BD-2AE=0$; ed avremo

$$-2\sqrt{A}\times\sqrt{C}\times D-(\sqrt{A})^2\times E=0,\text{onde} D\sqrt{C}+E\sqrt{A}=0.$$

$$\text{Ma (§ 249)}\ .\ .\ .\ S=\frac{D\sqrt{C}+E\sqrt{A}}{\sqrt{(A+C)}},$$

dunque, nel caso particolare di cui si tratta, e per B negativo, avremo unitamente $N=0$, ed $S=0$.

Se, al contrario, fosse B positivo, si troverebbe

$$+2\sqrt{A}\times\sqrt{C}\times D-2\sqrt{A}\times\sqrt{A}\times E=0;\quad \text{onde}$$
$$D\sqrt{C}-E\sqrt{A}=0.$$

E perciò si otterrebbe nel tempo stesso $M=o$, ed $R'=o$, cioè la prima trasformazione si ridurrebbe ad $My^2+Ry+F=o$, o $Nx^2+S'x+F=o$. (Vedasi su di ciò il § 254)

Le formole della seconda trasformazione (§ 249) ci danno, nel caso stesso, $b=-\frac{R}{2M}$, $a=\infty$,

ovvero, $a=-\frac{S'}{2N}$, $b=\infty$; come dev' essere: poichè lo scopo di questa trasformazione si è di riferire la curva *al suo vertice*, che allora trovasi situato ad una distanza *infinita*, sopra la linea guidata ad egual distanza *dalle due rette parallele*.

Tuttavia, dopo di aver determinata, mediante l' equazione tang $2\alpha=-\frac{B}{A-C}$, la posizione degli assi AX', AY' (fig. 146), rapporto ai quali l'equazione ha, per esempio, la forma

$$My^2+Ry+F=o,$$

possiamo proporci di fare svanire il termine in y. Basterà, per ciò, di fare $y=y+b$, e di eguagliare a o il coefficiente di y nella risultante equazione.

Da tal sostituzione otterremo $b=-\frac{R}{2M}$, ed

$$My^2+\frac{4MF-R^2}{4M}=o\text{, d' onde deducesi}$$

$$y=\pm\frac{1}{2M}\sqrt{(R^2-4MF)}.$$

Sopra AY' prendiamo $AD=-\frac{R}{2M}$, e guidiamo per il punto D la retta DE parallela ad AX'.

Poi, partendo dal punto D, portiamo due parti DB, DB', eguali ai valori di y, e conduciamo le BC, B'C' parallele a DE, o AX'; queste rette altro non saranno che le due parallele richieste e riferite al sistema degli assi DY', DX''. Ma si scorge che se, per un punto A' preso ad arbitrio sopra DE, si guidi A'Y'' parallela a DY', potrà prendersi egualmente A'X'', A'Y'' per nuovo sistema d'assi, rapporto ai quali l'equazione ha ancora la forma $y = \pm \frac{1}{2M} \sqrt{(R^2 - 4MF)}$.

Ma osserveremo di più che, nel caso in proposito, il sistema delle due addottate trasformazioni (§§ 245 e 246) può ancora esservi applicato.

Primieramente, prevalendoci delle formole del n.° 242, $a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}$, $b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}$, troveremo per a, b, due valori della forma $\frac{o}{o}$; il che è evidente riguardo ad a, attese le due equazioni di condizione, cioè $B^2 - 4AC = o$, $BD - 2AE = o$; che se moltiplicheremo la prima per D e la seconda per B, e sottrarremo l'una dall'altra, otterremo $B^2D - 4ACD - B^2D + 4ABE = o$, d'onde $-2CD + BE = o$; il che prova che anche b ha la forma $\frac{o}{o}$.

Questi risultati sono conformi alla natura del luogo geometrico; poichè, sia A' (fig. 146) un punto preso ad arbitrio sulla retta DE guidata ad egual distanza dalle due parallele BC, B'C'; giudiamo per A' una qualunque retta GG', ed avremo sempre A'G'=A'G, qualunque siasi la direzione di questa retta e la posizione del punto A' sopra DE. Dunque ogni punto della DE può (§ 100) riguardarsi come *un centro*.

Da questi stessi risultati viene indicato (t. 1° p. 211) che le due equazioni di condizione che hanno servito per determinare a e b riduconsi l'una all'altra; e, volendo fissare la posizione di uno dei punti che può prendersi per *centro*, o per nuova origine, convien dare ad a, per *es.*, un valore arbitrario, e determinare, mediante l' equazione di unica condizione, il corrispondente valore di b. Ottiensi pur anche un nuovo sistema di assi paralleli ai primi, e rapporto ai quali l' equazione vien ridotta alla forma $Ay^2+Bxy+Cx^2+F'=0$.

Facendo poi svanire il termine in xy colle formole del n.° 243, scorgeremo che dalla eliminazione di questo termine viene anche a svanire il termine in x^2 o in y^2, secondochè B è *negativo* o *positivo*.

Serva di esempio l' equazione

$$y^2-2xy+x^2+2y-2x-3=o$$

formata dalla moltiplicazione dei due fattori

$$y-x-1, \quad \text{ed} \quad y-x+3 \quad (\S\ 228).$$

Primo sistema di trasformazioni, mediante le formole (§ 249). Si trova prima, tang $2\alpha=+\frac{2}{o}$, $M=2$, $N=o$, $R=2\sqrt{2}$, $S=o$, ed ottiensi, per prima trasformata, $2y'^2+2\sqrt{2}.y-3=o$.

I due nuovi assi AX', AY' (fig. 146) fanno con AX gli angoli di 50.° e 150.°

Facciamo poi in questa trasformata $y=r+b$, e determiniamo b in modo che scomparisca il termine in y; otterremo $4b+2\sqrt{2}=o$, onde $b=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, e $2r^2-4=o$, o $r=\pm\sqrt{2}$.

Sopra AY' prendiamo una distanza $=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; e, partendo dal punto D, portiamo due distanze

DB, DB′ eguali alla $\sqrt{2}$; e poi guidiamo le DE, BC, B′C′ parallele ad AX′. Le rette BC, B′C′ saranno le rette richieste e riferite ad un nuovo sistema di assi, uno de' quali A′X″ ha una determinata posizione, e l'altro A′Y″ ha una posizione arbitraria.

Secondo sistema di trasformazioni dedotto dalle formole dei §§ 245 e 246.

Nella equazione $y^2-2xy+x^2+2y-2x-3=0$, facendo prima $y=y+b$, $x=x+a$, ed eguagliando a o i coefficienti di y e di x; vengono ad ottenersi le equazioni

$$2b-2a+2=0, \qquad -2+2a-2b=0,$$

che riduconsi ambedue alla $b-a+1=0$.

Supponiamo, per esempio, $a=2$, e, risultando $b=1$, otterremo per valore di F′,

$$F'=b^2-2ab+a^2+2b-2a-3=-4,$$

e per prima trasformata, $\quad y^2-2xy+x^2-4=0$.

Le due rette A′X′, A′Y′ (fig. 147) condotte parallelamente ad AX, AY, per il punto A′, dal quale abbiamo $a=2$, $b=1$, rappresenteranno il secondo sistema di assi.

Otterremo poi tang $2\alpha=+\frac{2}{0}$, $M=2$, $N=0$, il che ci dà per ultima trasformata, $2y^2-4=0$, ovvero $y=\pm\sqrt{2}$, come sopra.

Il terzo sistema di assi è A′X″, A′Y″.

251. Per non ommettere cosa alcuna sulle applicazioni delle formole della trasformazione delle coordinate all'equazione di secondo grado, indicheremo la maniera per passare dall'equazione di un'iperbole riferita ad assi rettangolari, qualunque siansi, all'equazione di questa curva riferita ai suoi assintoti.

Per giugnervi, supporremo prima che la curva sia (§ 245) riferita al suo centro come origine; così che la sua equazione riducasi alla forma

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+F'=0 \quad . \; . \; . \; (1).$$

Ciò posto, ad oggetto che il nuovo sistema di assi sia quello dei due assintoti, bisogna (§. 192) che l'equazione non racchiuda che il rettangolo delle variabili ed una quantità tutta nota.

Dovremo dunque sostituire nella (1) le formole

$$x = x\cos\alpha + y\cos\alpha' \; , \quad y = x\,\text{sen}\,\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha' \; ,$$

[mediante le quali (§ 89) si passa da un sistema rettangolare ad un obliquo], e poi determinare α, α' in modo che scompariscono i termini in y^2 ed in x^2.

Effettuando tal sostituzione ed eguagliando a o i coefficienti di y^2 e di x^2, si trovano i risultati che sieguono :

$$A\,\text{sen}^2\alpha' + B\,\text{sen}\,\alpha'\cos\alpha' + C\cos^2\alpha' = 0 \; . \; . \; (2),$$
$$A\,\text{sen}^2\alpha' + B\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha = 0 \; . \; . \; (3),$$
$$K = 2A\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\alpha' + B(\text{sen}\,\alpha\cos\alpha' + \text{sen}\,\alpha'\cos\alpha)$$
$$+ 2C\cos\alpha\cos\alpha' \; . \; . \; . \; (4) \; ;$$

onde otterremo la trasformata $Kxy+F'=0$.

Dividendo i due membri della (3) per $\cos^2\alpha$, determineremo l'angolo α, ottenendosi

$$\text{tang}^2\alpha = \frac{B}{A}\text{tang}\,\alpha + \frac{C}{A} = 0 \; . \; . \; . \; (5),$$

d'onde si deduce $\text{tang}\,\alpha + -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{(B^2-4AC)}$.

In tal modo otterremo, in apparenza, due valori per la tang α. In fatti, osservando che la (2) è un composto in α' come la (3) è un composto in α, conosceremo che la risoluzione della (2) deve darci i valori stessi della (3) ; cosichè concluderemo che, se il primo dei due valori rappresenta qui sopra quello di tang α, dovrà il secondo esprimer quello di tang α', e reciprocamente.

Avremo dunque, per esempio

$$\text{tang}\ \alpha = \frac{-B+\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A},$$

$$\text{tang}\ \alpha' = \frac{-B-\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A},$$

valori identici con quelli già ottenuti n.° 239.

Altro non ci resta che di determinare il valore corrispondente al coefficiente K. Per ciò daremo alla (4) la forma

$$K = \cos\alpha\cos\alpha'[2A\text{tang}\alpha\text{tang}\alpha' + B(\text{tang}\alpha + \text{tang}\alpha') + 2C],$$

Osservando poi, che

$$\cos\alpha.\cos\alpha' = \frac{1}{\sqrt{[(1+\text{tang}^2\alpha)(1+\text{tang}^2\alpha')]}},$$

e che le note proprietà della (3) ci danno

$$\text{tang}\ \alpha.\text{tang}\ \alpha' = -\frac{B}{A}, \quad \text{tang}\ \alpha.\ \text{tang}\ \alpha' = \frac{C}{A};$$

ne dedurremo

$$\text{tang}^2\alpha + \text{tang}^2\alpha' = \frac{B^2}{A^2} - 2\text{tang}\alpha\text{tang}\alpha' = \frac{B^2-2AC}{A^2}.$$

Questi diversi valori, sostituiti nella espressione di K, ci danno, a riduzione effettuata,

$$K = \frac{4AC-B^2}{\sqrt{[B^2+CA-C)^2]}}.$$

Dunque finalmente sarà l' equazione trasformata

$$XY = \frac{F'.\sqrt{[B^2+(A-C)^2]}}{B^2-4AC}.$$

Le formole, per effettuare la doppia trasformazione, sono

1.° $a = \frac{2AE-BD}{B^2-4AC}, b = \frac{2CD-BE}{B^2-4AC}, F' = F + \frac{Db+Ea}{2}$

2.° $\tan \alpha = \frac{-B+\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A}$,

$\tan \alpha' = \frac{-B-\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A}$, $K = -\frac{B^2-4AC}{\sqrt{[B^2+(A-C)^2]}}$

Serva di esempio l' equazione già discussa (247)

$$y^2+2xy-2x^2-4y-x+10=0.$$

Avremo prima per a, b, F';

$$a=\frac{1}{2},\quad b=\frac{3}{2},\quad F'=\frac{24}{4}=0;$$

ciò che ci dà per prima trasformata

$$y^2+2xy-2x^2+\frac{27}{4}=0.$$

Otterremo poi

$$\tan\alpha=-1+\sqrt{3},\quad \tan\alpha'=-1-\sqrt{3},$$

$$K=-\frac{12}{\sqrt{13}}.$$

Sarà la 2.ª trasformata $xy=\frac{9}{16}\sqrt{13}$.

Questo risultato è di facile verificazione; poichè, rappresentando A e B i semiassi di un' iperbole, avremo (§ 192)

$$xy=\frac{A^2+B^2}{4};\quad \text{ma (§ 247)}$$

$$A^2=\frac{9}{8}\sqrt{(13-1)},\quad B^2=\frac{9}{8}\sqrt{(13+1)};$$

dunque $\frac{A^2+B^2}{4}=\frac{9}{16}\sqrt{13}$.

§ III. *Determinazione di una sezione conica in sequela di alcune condizioni. Proprietà comuni alle tre curve.*

252. Si possono, come per la linea retta e per il cerchio (§ 17, e 60), rintracciare le sezioni coniche che soddisfino a certe date condizioni; e, in questo caso, i coefficienti delle loro equazioni devono riguardarsi come *costanti indeterminate* i di cui valori dipendono dalle condizioni imposte alla retta.

Riprendendo adesso l'equazione generale delle curve di secondo gr.° , e dividendo tutti i suoi termini per il coefficiente di y^2, la ridurremo alla forma

$$y^2+axy+bx^2+cy+d+e=o \quad . \; . \; . \; (1).$$

E siccome questa nuova equazione non racchiude che *cinque* coefficienti, a, b, c, d, e, ne siegue che si può, in generale, fare addempire cinque condizioni differenti alla curva; condizioni che, espresse analiticamente, serviranno a determinare le quantità a, b, c, d, e.

Siaci proposto, per esempio, di *far passare una sezione conica per cinque punti*.

Denominiamo (x', y'), (x'', y''), (x''', y'''), (x^{IV}, y^{IV}), (x^{V}, y^{V}) le coordinate di questi punti. Sostituendo successivamente nella (1) ciascuno dei cinque sistemi, si otterranno altrettante equazioni di primo grado in a, b, c, d, le quali, essendo risolute, ci daranno i valori di quei coefficienti, e sostituendoli nella (1), si otterrà quello della sezione conica individualmente richiesto. Questa curva sarà poi un'ellisse, un'iperbole o una parabola, secondo che avremo fra i coefficienti (§ 226) 1, a, b, dei tre primi termini,

$$a^2-4b<o, \qquad a^2-4b>o, \qquad a^2-4b=o.$$

Può accadere che la curva si riduca ad una delle varietà. Incombe al calcolo il far emergere tutte queste circostanze.

Osserveremo ancora che, se la curva cercata dovrà essere una parabola, basteranno quattro punti per determinarla; avendosi già fra i coefficienti dell' equazione la relazione particolare

$$a^2-4b=o.$$

Tuttavia, siccome questa equazione è di secondo grado, mentre che le altre sono di primo grado, si dovranno in generale ottenere *due parabole*, per risposta al quesito,

253. In luogo di assegnare *cinque* punti della curva, possono supporsi di posizione cognita alcune rette cui la curva vien sottoposta ad esser *tangente*.

Se, per esempio, si vuò che la curva sia tangente ad una retta $y=mx+n$, essendo m ed n quantità note, basta combinare questa equazione colla (1), e, dopo di aver formata un' equazione di 2.° gr.° in x, eguagliare (§ § 64, 67) fra loro le due radici di questa equazione. Otterremo così una *prima* relazione fra le indeterminate a, b, c, d, e, e le quantità cognite m, n.

Lo stesso raziocinio avrà luogo per una seconda, una terza, ... , retta cui la curva dovrebbe esser tangente.

Trattandosi di un' iperbole, la cognizione di un' assintoto equivale a quella di una tangente e del suo punto di contatto, poichè (§ 161) gli assintoti sono tangenti all' infinito. Perciò, bastano altre tre condizioni per determinare la curva.

254. Se dovesse la curva avere un centro, e fosse data la posizione di questo punto, sarebbero ancora bastanti altre tre condizioni per la determinazione della curva.

In fatti, giacchè nulla c' impedisce di prendere

questo punto per origine, avrà allora l'equazione (§ 245) la forma

$$y^2+axy+bx^2+f=o,$$

e non racchiuderà che tre coefficienti da determinarsi; e perciò la cognizione del centro equivale a *due* differenti condizioni. È vero bensì che, in questo caso, altro esser non può la curva se non se un' ellisse o un' iperbole.

255. Quando sia data la posizione del sistema degli assi, o di un sistema di diametri conjugati, bastano due altre condizioni per determinare la loro grandezza e perciò la stessa curva. Poichè, riferendo la curva a questo sistema, avremo l'equazione

$$A'y^2 \pm B'^2x^2 = \pm A'^2B'^2, \text{ in cui } A' \text{ e } B'$$

sono le sole costanti da determinarsi.

In quanto alla parabola, conoscendo la posizione del sistema degli assi, o di un sistema di assi conjugati, basta un' altra condizione per determinare la curva, poichè nella $y^2=2p'x$, non deve determinarsi che p'.

256. Su tal soggetto sarà opportuno il far conoscere un mezzo assai più semplice di quello già esposto (§ § 184 e 210), per costruire la curva; *conoscendo un sistema di assi conjugati ed il parametro di questo sistema*, trattandosi di una parabola; ovvero un sistema di diametri conjugati, se si trattasse di un' ellisse o di un' iperbole.

Prendiamo prima in considerazione una parabola. Dalle AX, AY (fig. 148) venga costituito un sistema di assi conjugati, il di cui parametro sia $2p'$. Prendiamo sopra AY, disotto al punto A una distanza $AD=2p'$; e conduciamo per il punto D una retta DL parallela ad AX. Guidiamo in fine per il punto A una retta qualunque AH.

Le equazioni, della parabola, della retta AH e della parallela DL, sono $y^2=2p'x$, $y=ax$, $y=-2p'$.

Ma dalla combinazione di queste due ultime equazioni abbiamo per le coordinate del punto E, ove la retta AH incontra la parellela DL,

$$y = -2p', \qquad x = -\frac{2p'}{a}.$$

Altronde poi, dal combinare la prima colla seconda equazione, troviamo per le coordinate dei punti d' intersecazione A ed M, $x=o$, $y=o$, e poi $x=\frac{2p'}{a^2}$, $y=\frac{2p'}{a}$; dunque si scorge che *le distanze* DE *ed* MP, *o* AG, *sono eguali.*

Proprietà che si verifica per tutte le rette guidate dal punto A.

Ciò posto, per costruire la curva, *prendiamo sopra* AY, *al di sotto del punto* A, $AD=2p'$ *e guidiamo* DL *parallela ad* AX. *Condotte poi delle rette indefinite* AH, AH', . . . porteremo le distanze DE, DE', ... *da* A *in* G, G', . . . *e da questi ultimi punti guideremo le* GK, G'K', . . . , *parallele ad* AX. I punti M, M', . . . , ove le rette AH e GK, AH' e G'K' s' incontrano, appartengono necessariamente alla curva.

Passiamo adesso all' ellisse. Siano $OB=A'$, $OC=B'$ (fig. 149), due diametri conjugati, AY la tangente nel punto A, DL una parallela ad AX, guidata in una distanza $AD=-\frac{2B'^2}{A'}$ (che è il parametro del dato sistema). Tiriamo poi due qualunque corde supplementarie AM, BM.

Le equazioni, di queste due rette e della parallela DL, sono $y=ax$, $y=a'(x-2A')$, $y=-\frac{2B'^2}{A'}$; essendo le quantità a, a', come è noto, legate fra lo-

ro dalla relazione $aa' = -\frac{B'^2}{A'^2}$.

Ma, dalla combinazione della prima colla terza equazione, abbiamo per le coordinate del punto E,

$$y = -\frac{2B'^2}{A'}, \qquad x = -\frac{2B'^2}{A'a}.$$

E, per altra parte, facendo $x = o$ nella seconda equazione, risulta per l'ordinata del punto G, ove la retta BM incontra AY . , . $y = -2Aa'$, o attesochè $aa' = -\frac{B'^2}{A'^2}$, . . . $y = \frac{2B'^2}{A'a}$; dunque AG = DE.

(Osserveremo che questa proprietà racchiude implicitamente quella della parabola, poichè, dal supporre infinito l'asse maggiore, la retta BM diviene una parallela ad AX).

Dopo ciò; per costruire un'ellisse, conoscendo un sistema di diametri conjugati e l'angolo che fanno fra loro, *condurremo da una delle estremità* A *del diametro* AB *una parallela all'altro; e sopra questa parallela* AY, *al di sotto del punto* A, *prenderemo una distanza* AD $= \frac{2B'^2}{A'c}$. *Guidate poi le rette indefinite* AH, AH' . . . , *porteremo le distanze* DE, DE' , . . da A *in* G, G' , . . .; *e dall'unire questi ultimi punti con il punto* B, risulteranno i punti M, M' . . , ove le AH e BG, AH' e BG' , ..., s'incontrano, punti che appartengono necessariamente alla curva.

Per l'iperbole ha luogo una egual costruzione.

257. Ecco una nuova proprietà, comune alle tre curve di secondo grado, che può servire a costruirle in certe circostanze. È dessa relativa ai fochi ed alla *direttrice* (Ved. § § 117 e 118).

Siano, (fig. 150) MNAM' . . . una curva di

secondo grado, LL' la direttrice che si suppone di posizione data (§ 118), ed F uno dei fochi. Prendiamo in considerazione due punti M, N, della curva, e guidiamo le rette MN, FM, FN, prolungando MN fino che s' incontri in R con la direttrice, e poi uniamo FR.

La retta FR *dovrà dividere in due punti eguali l' angolo* NF*m formato dal raggio vettore* FN *e dal prolungamento* F*m dell' altro raggio vettore* FM.

Infatti, guidiamo dal punto N la retta NI parallela ad FM, e caliamo le perpendicolari MP, NQ, sopra la direttrice. Avremo, dalla proprietà caratteristica della direttrice (§ 117),

MF:MP::NF:NQ, o MF:NF::MP:NQ, . . . (1);

Ma i triangoli simili RPM, RQN ed RFM, RIN, ci danno MP:NQ::RM:RN, RM:RN::FM:NI; onde

MP:NQ::MF:NI ; . . . . (2) ;

dunque MF:NF::MF:NI; perciò, NF = NI.

Il triangolo NIF essendo isoscele, ne siegue che gli angoli NFI, ed NIF o IF*m* siano eguali. C. C. D. D.

258. Questa proprietà in se stessa molto curiosa, prova altronde che *una sezione conica è determinata, allorchè sia dato un foco e tre punti della curva*; cosichè la cognizione di uno de' fochi equivale a due condizioni differenti.

In fatti, siano M, N, P (fig. 151) tre punti dati per i quali vuol farsi passare una sezione conica, ed F uno dei fochi di questa curva.

1.° *Guidate le rette* MN, FM, FN, *e diviso l' angolo* NF*m in due parti eguali*, il punto R, ove s' incontrano le due rette MN, FR, sarà per necessità *un primo punto* della direttrice.

2.° *Se eseguiremo un'analoga costruzione riguardo ai tre punti* N, P, F, ovvero M, P, F, *verremo a determinare un secondo punto* S di questa direttrice, che sarà allora RS.

Adesso, se dal punto F abbasseremo la FD perpendicolare ad RS, avremo la *direzione* del primo asse. Guidiamo poi da uno dei punti dati, N per esempio, la NQ perpendicolare ad RS, otterremo NF:NQ, per *costante rapporto* che deve esistere fra la distanza di un punto qualunque della curva dal foco, e la sua distanza dalla direttrice. Allora, possiamo determinar facilmente (§ 118) le grandezze degli assi.

Dall' essere, il rapporto NF:NQ, *minore*, o *maggiore*, o *eguale* all' unità, risulta la curva, come si è veduto (§ 117) un' ellisse, o un' iperbole, o una parabola, Nella figura 151, la curva è una parabola, poichè abbiamo [illegible] = NQ.

259. *N. B.* Quando si esige in prevenzione che sia la curva *una parabola*, basta allora che siano dati *due* punti della curva con il foco; ed ecco come, in tal caso, si determina la direttrice.

Siano M ed N (fig. 152) i due punti dati, F il foco. *Dopo di aver determinato il punto* R, come nella costruzione precedente, *si descriva da uno dei dati punti*, M per esempio, *come centro con il raggio* MF, *una circonferenza*; e poi dal punto R si guidi una *tangente* RF *a questa circonferenza*; questa tangente altro non sarà che la *direttrice richiesta*; poichè risulta necessariamente dalla definizione della parabola, che la sua direttrice sia tangente a tutte le circonferenze descritte dai diversi punti della curva come centri, e con raggi eguali ai corrispondenti raggi vettori.

Poichè dal punto R si possono, in generale, condurre due tangenti alla circonferenza, ne siegue che potremo con tal mezzo ottenere *due* direttrici, e perciò *due* parabole; l' una è M'ANM, che ha per

direttrice RT, e per primo asse BX; e l'altra è *nNaMm'*, che ha per direttrice RT', e per primo asse B'X'.

Che se la circonferenza passasse per il punto R, allora il quesito non avrebbe che una soluzione.

Finalmente veruna soluzione avrebbe luogo, se il punto R fosse dentro della circonferenza.

260. La determinazione di una sezione conica mediante certe condizioni, è, in generale, un problema molto difficile a risolversi con l'analisi, attoso l'imbarazzo che bene spesso s'incontra nella scelta degli assi. E perciò si è prescelto principalmente di rintracciarne le soluzioni puramente geometriche, dipendentemente però dalle proprietà cognite delle tre curve. Con i quesiti che sieguono ci proponiamo di dare un'idea di queste sorti di costruzioni.

1.° Quesito. *Date tre rette ed un punto sopra di un piano, trovare una curva di secondo grado tangente a queste tre rette, e che abbia per Foco il punto dato.*

Siano Mm, Nn, Pp (fig. 153) le rette date; ed F il foco della curva in questione. Abbiamo veduto (§ 153) che, nell'ellisse e nell'iperbole, i piedi delle perpendicolari calate da un foco sopra le tangenti, *sono situati sulla circonferenza del cerchio descritta con il primo asse come diametro*, e (§ 208) che, nella parabola, questi stessi piedi *si trovano sul secondo asse.*

Ciò posto, caliamo dal punto F le tre perpendicolari FG, FH, FK; ci si presenteranno due casi: o li tre punti G, H e K formano un triangolo, ovvero sono essi in linea retta.

Nel primo caso, *dal congiungere questi punti due a due, e coll' innalzare, dai punti medj delle rette di congiunzione, le perpendicolari,* otterremo, nel loro punto d'incontro, O, il Centro della curva. *Guidiamo poi* OF, *e prendiamo*

sopra questa retta due parti OB, OA *eguali ad* OG; ed otterremo AB per primo asse; e la curva sarà o un'ellisse o un'iperbole, secondo che il punto B si trova situato sul prolungamento di OF, o dentro i punti O ed F.

Nella figura 153, la curva è un'ellisse; il di cui secondo asse CD si ottiene (§ 100) descrivendo dal punto F come centro, e con il raggio OB, un'arco di cerchio.

Se la curva fosse un'iperbole, sarebbe il centro dell'arco di cerchio in B (§ 105), ed OF sarebbe il raggio dell'arco.

Nel secondo caso, cioè, *quando li tre punti* G, H, K, (fig. 154) *sono in linea retta*, questa linea KHGY rappresenta il secondo asse della curva; che è allora una parabola; e, per avere il primo asse, basta *abbassare* FX *perpendicolare sopra* KY. Il quadruplo di AF rappresenta poi il parametro; e così la curva può facilmente costruirsi.

N. B. Quando già si sappia che la curva cercata esser debba una parabola, basterà conoscere *due tangenti ed il foco*, poichè il secondo asse è determinato dai piedi delle perpendicolari abbassate dal foco sopra queste tangenti; ed infatti, sappiamo già che *quattro* condizioni bastano per la parabola; e la conoscenza del foco equivale (§ 208) a *due* condizioni.

2.° Quesito. *Debba costruirsi un'ellisse, conoscendo il centro, la lunghezza del suo asse maggiore, una tangente ed il suo punto di contatto.*

Sia O (fig. 155) il centro dato, A il semiasse della curva, Tt la tangente ed M il suo punto di contatto.

Dal punto O *come centro, e con* A *per raggio, descriviamo una circonferenza di cerchio, che tagli generalmente* Tt *in due punti* R, R'; poi, *innalziamo dai punti* R, R', *le perpendicolari* RS, R' S', *a questa tangente*; esse passe-

Conducendo la OF, otterremo la direzione del primo asse; *e portando la* OR *da* O *in* A *ed in* B; *e poi* la OF da O in F'; otterremo i due vertici della curva, come anche li due fochi. Finalmente *delineando* la KK' in modo che l'angolo FOK sia eguale all'angolo LOF, otterremo il secondo assintoto.

N. B. Allorchè, in luogo di A, ci fosse dato il rapporto m, o $\frac{B}{A}$, la tangente trigonometrica dell'angolo FOK ci sarebbe cognita; e perciò la direzione della FO potrebbe facilmente determinarsi. In quanto alle grandezze dei semiassi, sono esse evidentemente rappresentate dalle OR ed RF.

Avremo $OR = A$, come abbiamo ora veduto; ed $RF = B$, attesa la relazione $OF = c = \sqrt{(A^2 + B^2)}$, che ci dà necessariamente $B^2 = c^2 - A^2 = \overline{RF}^2$.

4.° Quesito. *Essendo dati un' assintoto, due punti ed il rapporto degli assi di un' iperbole, costruire la curva.*

Siano LL', M, M', (fig. 157) l'assintoto ed i due punti dati; m il rapporto $\frac{B}{A}$ supposto cognito.

Congiunti i punti M ed M', *e presa, partendo dal punto* M', *una distanza* M'R' *eguale ad* MR, avremo il punto R' che apparterrà al secondo assintoto (§ 195).

E siccome il rapporto $\frac{B}{A}$, o m, è dato, faremo, in un qualunque punto I di LL', un' angolo LIG la di cui tangente eguagli m, *e* poi un' angolo HIL doppio di LIG. Finalmente condotta per il punto R' la KK' parallela ad IH, avremo così il secondo assintoto.

Può dunque la curva descriversi facilmente con il metodo del § 326.

N. B. Se invece del rapporto degli assi, fosse data la posizione di un terzo punto, dall'unire questo punto con uno dei punti già dati, si otterrebbe un nuovo punto del secondo assintoto, la di cui direzione resterebbe allora determinata.

Potranno servir di esercizio questi altri quesiti che qui accenniamo soltanto.

1.° *Costruire una parabola, conoscendo il foco, un punto ed una tangente.*

2.° *Costruire un' ellisse, conoscendo due tangenti, il centro e la lunghezza del primo asse* (la curva può essere un' iperbole).

3.° *Costruire un' iperbole, conoscendo un' assintoto, un fuoco o una tangente.*

261. Ultimeremo queste indagini, 1.° Colla dimostrazione di una proprietà che appartiene alle tre curve del secondo grado, della quale si sono approfittati i Geometri per costruire le sezioni coniche mediante alcuni dati; 2.° Colla ricerca dell' equazione della tangente ad una curva di secondo grado, riferita ad un qualunque sistema di assi (fig. 158). Ripresa l' equazione

$$y^2+axy+bx^2+cy+dx+e=o. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

che supporremo rappresentare una delle tre curve, riferita ad un sistema rettangolare o obbliquo, AX, AY.

A questa equazione può darsi le forma

$$y^2+(ax+c)y+b(x^2+\frac{d}{b}x+\frac{e}{b})=o. \quad . \quad . \quad (2),$$

d' onde, fatta $y=o$, per ottenere i punti ove la curva incontra l' asse delle x, ne risulterà

$$b(x^2+\frac{d}{b}x+\frac{e}{b})=o. \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

equazione le di cui radici altro non sono che le ascisse dei punti richiesti.

Se queste radici sono imaginarie, sarà questo un' indizio che la curva non ha alcun punto comune con l'asse delle x; e se sono esse eguali, la curva è tangente a quest' asse.

Ma, supponendole reali ed ineguali, rappresentiamole con x', x''.

Il trinomio

$$x^2+\frac{d}{b}x+\frac{e}{b} \text{ riducesi (t.° 4.° p. 20) ad } (x-x')(x-x'')$$

Per esprimere questo prodotto geometricamente, osserveremo che, rappresentando AP una qualunque ascissa, ed AB, AC le ascisse x', x'', avremo necessariamente $(x-x')(x-x'')=PB\times PC$.

Per altra parte, l'ultimo termine della (2)', ossia $b(x-x')(x-x'')$, è eguale al prodotto delle due radici di questa equazione risoluta rapporto ad y (t.° 1.° p. 182); e queste radici vengono rappresentate da PM e Pm

Avremo dunque la relazione

$$PM\times Pm=b(x-x')(x-x'')=b\times PB\times PC;$$

$$\text{onde} \qquad \frac{PM\times Pm}{PB\times PC}=b.$$

Per altre ascisse AP', AP'', ... , risulterebbe egualmente

$$\frac{P'M'\times P'm'}{P'B\times P'C}=b, \quad \frac{P''M''\times P''m''}{P''B\times P''C}=b, \ \ldots, \text{ onde}$$

$$\frac{PM\times Pm}{PB\times PC}=\frac{P'M'\times P'm'}{P'B\times P'C}=\frac{P''M''\times P''m''}{P''B\times P''C}=\ldots\ldots$$

È di quì che in qualunque curva di secondo grado, riguardando una qualunque secante AX e poi

una serie di altre secanti parallele fra loro e condotte in direzione affatto arbitraria, *i rettangoli delle parti di queste parallele, comprese fra i loro punti d' incontro con la prima secante ed i loro punti d' intersecazione con la curva, stanno ai rettangoli delle parti della prima secante, comprese fra i piedi delle parallele ed i punti ove questa secante incontra la curva, in un costante rapporto.*

Si scorge facilmente che questa proprietà comprende implicitamente quelle che sono state dimostrate (nei n. 146 e 243).

In fatti, essendo la prima secante un qualunque diametro, se le altre secanti saranno parallele ai conjugati di questo diametro; ne risulterà $PM = Pm$, $P'M' = P'm'$, ec. e la relazione di sopra diverrà

$$\frac{\overline{PM}^2}{PB \times PC} = \frac{\overline{P'M'}^2}{P'B \times P'C} = \frac{\overline{P''M''}^2}{P''B \times P''C} = \ldots$$

Serve questa proprietà per *far passare una sezione conica per cinque punti dati*; ma i dettagli che si esigono per tal costruzione ci allontanerebbero troppo dal nostro istituto. E perciò chi bramasse conoscerli potrà consultare il *Trattato delle sezioni coniche di* LHOPITAL:

262. Per ottenere l'equazione della tangente in un punto dato di una curva di secondo grado, faremo uso del metodo del n.° 68.

Siano x', y' ed x'', y'' le coordinate di due punti della curva, uno de' quali (x'', y'') deve ridursi ad un punto di contatto.

L'equazione della curva essendo generalmente

$$y^2 + 2axy + bx^2 + 2cy + 2dx + e = o. \ldots (1),$$

(vedremo or ora perchè vien posto in evidenza il fattore 2 nei termini in xy, y ed x), la secante viene espressa analiticamente dal sistema delle tre equazioni

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}\,(x-x')\,,\;.\;.\;.\;(2)\,,$$

$$y'^2+2ax'y'+bx'^2+2cy'+2dx'+e=o\,.\;.\;,\;(3)\,,$$

$$y''^2+2ax''y''+bx''^2+2cy''+2dx''+e=o\ldots\;(4)\,,$$

Cerchiamo, mediante le due ultime equazioni il valore del coefficiente $\frac{y'-y''}{x'-x''}$.

Sottraendo dalla (3) la (4), avremo

$$y'^2-y''^2+2a(x'y'-x''y'')+b(x'^2-x''^2)+2c(y'-y'')$$
$$+2d(x'-x'')=o\,;$$

o, osservando che $y'^2-y''^2=(y'+y'')(y'-y'')$. $x'^2-x''^2=(x'+x'')(x'-x'')$; e che

(§ 194) $x'y'-x''y''=x'(y'-y'')+y''(x'-x'')$,

$$\left.\begin{array}{l}(y'-y'')[y'+y''+2ax'+2c]\\ +(x'-x'')[2ay''+b(x'+x'')+2d]\end{array}\right\}=o\,;\ \text{d' onde}$$

$$\frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{[2ay''+b(x'+x'')+2d]}{y'+y''+2ax'+2c}\,.\;.\;.\;(5).$$

E portando questo valore nella (2) otterremo l'equazione della secante, riunendovi bensì la (3).

Ma per ottener subito l'equazione della tangente, basta porre, nel risultato (5), $x'=x''$, $y'=y''$, e far poi la sostuzione nella (2). Otterremo con ciò

$$y-y''=\frac{(ay''+bx''+d)}{y''+ax''+c}(\;x-x''\;)\;.\;.\;(6)$$

che sarà la richiesta equazione che non rappresenta la tangente se non in quanto vi si considera inclusa la relazione (4), mediante la quale può questa simplificarsi.

In fatti, se si elimina il donominatore, e si osserva che dalla (4) deducesi

$$y''^2+2ax''y''+bx''^2=-2cy''-2dx''-e\ ;$$

otterremo, a riduzione effettuata, la (7)

$$yy''+a(x''y+xy'')+bxx''+c(y+y'')+d(x+x'')+e=o\ ..(7),$$

risultato che ottiensi facilmente mediante la (1), cangiando 1.°

y^2+bx^2 in $yy''+bxx''$ (ved. § 69),

2.° $2axy$, ovvero $axy+axy$ in $ax''y+axy''$;

3.° $2cy$, ovvero $cy+cy$ in $cy+yc''$,

4.° finalmente $2dx$ in $dx+dx''$.

Che se la curva venisse riferita ad un sistema di assi l'uno de' quali sia un diametro e l'altro la tangente condotta all'estremità di questo diametro, avrà allora l'equazione della curva (§ 116) la forma

$$y^2=2px+qx^2.$$

In questo caso sarà $a=o$, $b=-q$, $c=o$, $d=-p$, $e=o$; e l'equazione della tangente diverrà

$$yy''=p\ (x+x'')+qxx''\ \ldots\ (8)$$

In simil guisa si troverebbero le equazioni corrispondenti alle altre forme sotto le quali abbiamo considerate le equazioni delle differenti curve.

Nelle applicazioni, occorre bene spesso richiamare l'equazione della tangente sotto la forma (8).

§ IV. *Applicazioni della teoria delle curve di secondo grado.*

263. Abbiamo già veduto (t.º 3.° § 49) che, senza che prima occorra risolvere un' equazione di secondo grado ad una sola incognita, possiamo, mediante l' intersecazioni della retta e del cerchio, valutare in *linee* le radici di questa equazione. Passeremo adesso a vedere in qual modo anche le equazioni di terzo e di quarto grado possano essere egualmente costruite per mezzo delle intersecazioni di due sezioni coniche.

Il principio fondamentale di simili costruzioni consiste nel riguardare la proposta equazione *come un risultato dell' eliminazione fra due equazioni a due incognite, una delle quali, che si suppone incognita primitiva, vien presa per ascissa, e l' altra per ordinata.* Costruendo successivamente, e sopra li stessi assi, i luoghi geometrici di queste equazioni (§ 31), veniamo a conoscere che le curve s' incontrano in uno o più punti, le di cui ascisse rappresentano, in *linea*, le radici reali della proposta equazione.

Sviluppiamo tal principio sopra l' equazione di 4º grado, $x^4+px^3+qx^2+rx+S=o$ . . (1).

Facciamo in questa equazione $x^2=ky$ . . (2),

(essendo k una quantità arbitraria, costante); che diviene $k^2y^2+pkxy+qky+rx+S=o$ . . (3).

Ciò posto, siccome la (1) risulta evidentemente dalla eliminazione di y fra la (2) e la (3), ne siegue che essa racchiude non solo tutti i valori di x, idonei a verificare la (2) e la (3), ma ancora nel tempo stesso alcuni valori di y; dunque se, mediante qualunque mezzo, potremo ottenere i sistemi

dei valori di x e di y comuni alle equazioni (2), (3), tenendo a calcolo quei soli di x, avremo le radici della (1).

Ma l' equazione (2) costruita riguardo agli assi rettangolari, rappresenta una parabola il di cui primo asse è diretto secondo l' asse delle y, ed ha per origine lo stesso vertice della curva.

Così la (3), essendo costruita sulli stessi assi, ha per luogo geometrico un'iperbole (§ 241), della quale un'assintoto è parallelo all' asse delle x.

Queste due curve si tagliano generalmente in *quattro* punti (giacchè l' equazione finale (1) è di 4.° grado), le di cui coordinate hanno esclusivamente la proprietà di soddisfare nel tempo stesso alle loro equazioni. E perciò le ascisse di questi punti sono le radici della (1).

N. B. Il numero delle radici reali di questa equazione è eguale al numero dei punti d' intersecazione.

264. Si può, con alcuni artificj di calcolo, sostituire alle equazioni fissate in origine, delle altre di più facile costruzione. Così, per esempio, è sempre possibile la sostituzione dell' equazione della circonferenza all'equazione (3) che è assai più complicata. Basta perciò il supporre che la (1) sia priva di secondo termine; trasformazione eseguibile in qualunque equazione (t. 4. § 39).

Riprendiamo perciò l' equazione di 4.° gr.° priva

di 2.° termine $x^4+qx^2+rx+S=o$ . . (1),
e facciamo $x^2=ky$ . . (2);
otterremo $k^2y^2+qky+rx+S=o$ . . (3).

Da questa prima trasformazione veniamo a scorgere in prima, che i luoghi geometrici da costruirsi sono *due parabole*, la seconda delle quali (§ 248) ha i suoi assi principali paralleli agli assi coordinati. Con facilità si determinerebbe il vertice, facendo svanire il termine in y, e la quantità tutta

nota. Ma questa equazione, divisa per k^2 e poi addizionata colla (2), diviene

$$x^2+y^2+\frac{q-k^2}{k}.\,y+\frac{rx}{k^2}+\frac{S}{k^2}=o \quad \ldots \quad (4),$$

equazione che può sostituirsi alla (3); e che ha per luogo geometrico una circonferenza di cerchio, costruibile con il metodo indicato (§ 147).

In oltre, siccome la quantità k è arbitraria, niente osta il supporre $k=\sqrt{q}$, d'onde $q-k^2=o$; con che viene a scomparire il termine in y nella (4); ed in tal caso il centro del cerchio trovasi situato sull' asse delle x.

265. Consideriamo adesso l'equazione di 3.° grado,

$$x^3+px^2+qx+r=o,$$

la quale, col fare $x^2=ky$, si cangia in

$$kxy+pky+qx+r=o.$$

Dal costruire queste due equazioni otterremo due curve i di cui punti d' intersecazione avrebbero per ascisse le radici reali della proposta.

La terza equazione è quella di un' iperbole i di cui assintoti sono (§ 227) paralleli agli assi coordinati, e può facilmente costruirsi quando siasi fissata la posizione di questi assintoti e di un sol punto della curva

Che se ci piacesse di ridurla all' equazione di un cerchio, converebbe far prima svanire il secondo termine, e poi moltiplicarla per x. Quest' ultima preparazione, che ha per oggetto di ridurre l'equazione al quarto grado, introduce una radice $x=o$, che in realtà vi è estranea, ma nel risultato si procura di prescinderne.

Sia dunque $\quad x^4+qx^2+rx=o \quad \ldots \quad (1)$

l' equazione privata di 2.° termine e poi moltiplicata per x.

Facciamo $\quad x^2=ky \quad \ldots \quad (2)$

otterremo $$y+\frac{q}{k}y+\frac{r}{k^2}x=o \quad . \quad . \quad (3);$$

ovvero, addizionando la (2) colla (3), e trasportando

$$y^2+x^2+\frac{q-k^2}{k}y+\frac{r}{k^2}x=o;$$

o finalmente, facendo, per più semplicità, $k=\sqrt{q}$,

$$y^2+x^2+\frac{r}{k^2}x=o \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

equazione di una circonferenza di cerchio il di cui centro è sull' asse delle x, e passa per l' origine.

Applichiamo queste generali riflessioni a qualche esempio.

266. 1.° PROBLEMA. *Dato un qualunque arco* AB *di una circonferenza, debba dividersi in tre parti eguali.*

Dalla formola (t. 3. § 107), che ci dà il seno del *terzo* di un' arco in funzione del seno di quest' arco, abbiam trovato

$$4\text{sen}^3\frac{1}{3}a-3\ \text{sen}\frac{1}{3}a+\text{sen}\ a=o.$$

Siano AB $=a$, BP $=$ sen $a=q$,

$$MQ=\text{sen}\frac{1}{3}a=x,\ OA=r\ (\text{fig. } 159);$$

dal ristabilire l' omogeneità (t. 3. § 57); otterremo $4x^3-3r^2x+qr^2=o$ . . . . (1), equazione, la di cui costruzione prima rintracceremo.

Per ottenerla, facciamo $x^2=ry$ . . . (2); e l'equazione (1) diviene

$$4xy-3rx+qr=o \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Si guidino per il centro del cerchio dato due assi

rettangolari OX, OY, uno de' quali passi per il punto A, e si costruisca la curva rappresentata dalla equazione (2). Sarà questa una parabola LOL', il di cui asse principale è diretto secondo OY, ed ha per parametro r, e perciò la sua costruzione non presenta difficoltà alcuna.

In quanto alla equazione (3), che appartiene ad evidenza ad un'iperbole, risolvendola successivamente riguardo ad y e ad x, si trova

$$y=\frac{3rx-qr}{4x}=\frac{3r}{4}-\frac{qr}{4x},\text{ ed }x=o-\frac{qr}{4y-3r};$$

ciò che prova (§ 227) che i due assintoti sono 1.° una retta FEF' condotta parallelamente all'asse delle x alla distanza $OE=\frac{3}{4}r$; 2.° lo stesso asse delle y.

L'ipotesi poi di $x=o$ introdotta nella (3) ci dà $x=\frac{q}{3}$. Cosichè prendendo sù di OA una distanza $OC=\frac{BP}{3}$, si ottiene un punto dell'iperbole, la quale resta allora facile a costruirsi. atteso il processo del n.° 197, che noi supponiamo qui figurato dai due rami $nm'n'$, $n''m''n'''$.

Il primo di questi rami incontra LOL' in due punti m, m'; il secondo in un sol punto m''; e questi punti sono tali che, calando mp, $m'p'$, $m''p''$ perpendicolari ad OX, si abbiano Op, Op', Op'' per le tre radici della equazione (1).

Ciò posto, siccome questi valori, uno de' quali Op'' è *negativo*, esprimono seni, *convien portarli sopra* OY *da* O *in* R, R', R'', *e poi guidare* le RM, R'M', R''M'' parallele ad OX; ed otterremo in fine AM, AM', ANM'' per i valori de-

gli archi $\frac{a}{3}$, $\frac{\pi-a}{3}$, $-\frac{\pi+a}{3}$. (V. t.° 3.° § 107).

267. Questo problema può costruirsi in modo da far servire il cerchio dato come uno dei luoghi geometrici.

Siano sempre AB (fig. 160) o a l' arco che deve dividersi in tre parti eguali, AM il *terzo* di quest' arco che si suppone, per ora, determinato. Facciano poi

$$OP, \text{ o } \cos a = p, \ BP, \text{ o } \operatorname{sen} a = q, \ OQ = x, \ MQ = y$$

Avremo per prima relazione

$$y^2 + x^2 = r^2 \ldots\ldots (1).$$

Adesso, dal prolungare MQ finchè s' incontri in N con la circonferenza, dal qual punto N guidando la NR parallela ad OX, e tirando la BN, formeremo così un triangolo OMQ (t.° 2.° §. 45), ed avremo $\quad OQ : QM :: BR : RN$;

ma, dalla costruzione,

$$BR = q + y; \quad RN, \text{ o } PQ = x - p;$$

dunque $\quad x : y :: q + y : x - p; \quad$ onde

$$y^2 - x^2 + qy + px = 0 \ldots\ldots (2),$$

equazione che, combinata colla (1), ci darebbe, eliminando x, il valore di y, o di sen $\frac{a}{3}$. Ma invece di effettuare codesta eliminazione, potremo (§ 51) costruire i luoghi geometrici rappresentati dalle equazioni (1) e (2).

Ma la (1) è quella del cerchio dato; mentre la (2) rappresenta evidentemente un' iperbole equilatera i di cui due assi sono paralleli agli assi coordi-

nati. Per ottenerne la posizione risolviamola rapporto ad y; avremo $y=-\frac{q}{3}+\sqrt{(x^2-px+\frac{q^2}{4})}$.

Prendiamo sopra OY una distanza

$OE=-\frac{q}{2}=-\frac{BP}{2}$; la linea GG' parallela ad OX è un diametro della curva; e perciò uno degli assi cercati.

Si sà poi (§ 239) che la metà del coefficiente di x sotto il radicale, preso con segno contrario, cioè $\frac{p}{2}$, altro non è che l'ascissa del centro; dunque la HH' guidata dal punto H mezzo di OP, e parallelamente ad OY, rappresenta l'altro asse.

Ora, poichè l'iperbole è equilatera, ne siegue che gli assintoti dividino in due parti eguali gli angoli retti HIG' ed HIG. E così queste rette possono facilmente determinarsi.

Risulta finalmente, dall'ispezione della equazione (2), che la curva passa per l'origine. Conoscendo dunque un punto O della curva ed i suoi due assintoti, sarà perciò la curva determinata (§ 197).

N. B. Costruendola conosceremo che incontra il cerchio in quattro punti M, M', M'' e B', punto ove la perpendicolare BP prolungata taglia la circonferenza.

La posizione dei tre primi punti M, M', M'', si spiega facilmente. Abbiamo

$$1.^\circ \quad MQ=\text{sen}\frac{AB}{3}=\text{sen}\frac{a}{3};$$

2.° Prendendo ABC eguale ad un *terzo* dalla circonferenza, cioè $ABC=\frac{2\pi}{3}$, e $CM=\frac{AB}{3}=\frac{a}{3}$, sa-

rà (t.° 3.° § 107)

$$M'Q' = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}\right) = \text{sen}\left(\pi-\frac{2\pi}{3}-\frac{a}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi-a}{3}\right)$$

3.° Dal prendere ABDC′ eguale a *due terzi* della circonferenza, cioè $ABDC' = \frac{4\pi}{3}$, e $C'M'' = \frac{a}{3}$, sarà

$$M''Q'' = \text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3}\right) = \text{sen}\left(\pi+\frac{\pi+a}{3}\right) = -\text{sen}\,\frac{\pi+a}{3}$$

In quanto al quarto punto B′, che ha per coordinate $x=p$, $y=-q$, dal sostituire questi valori nelle equazioni (1) e (2), otterremo $p^2+q^2=r^2$, e $q^2-p^2-q^2+p^2=0$; ciò che prova che questo punto deve in fatti appartenere alle due curve.

Se, per eliminare x, si addizioni la (2) colla (1), si troverà $2y^2+qy+px=r^2$, onde $x=\frac{r^2-qy-2y^2}{p}$.

Questo valore, sostituito nella (1), ci dà,

$$4y^4+4qy^3-3r^2y^2-2qr^2y+q^2r^2=0,$$

risultato divisibile per $y+q$, che ci dà per quoto

$$4y^3-3r^2y+qr^2=0.$$

Quest' ultima equazione è identica colla (1) del n.° precedente; ma si vede nel tempo stesso che, a norma del secondo metodo addottato per risolvere la proposta questione, sono state stabilite due equazioni in x ed y, più generali dello stesso quesito, poichè, eliminando x, si giunge all' equazione relativa a questo quesito, ma involuta con un' *estraneo fattore*.

268. È così che deve interpretarsi l' osservazione fatta da alcuni geometri; cioè, che la costruzione di una determinata equazione per la intersecazione delle curve, *ci dà qualche volta i punti comuni*

alle due curve in un numero maggiore delle radici reali della proposta.

Finchè l' equazione del problema è in realtà l' equazione finale da costruirsi risultante dalla eliminazione fra le due equazioni a due incognite; *il numero dei punti comuni ai luoghi geometrici è sempre eguale al numero delle radici reali della proposta.* Ma se questa equazione non è, come nel n.° precedente, che una parte dell' equazione finale corrispondente alle due equazioni, *allora i punti comuni possono essere in maggior numero delle radici reali* della equazione. Le coordinate di questi punti verificano le due equazioni a due incognite; ma le loro ascisse possono non verificar la proposta.

269. 2.° Problema. *Trovare due rette, medie proporzionali fra due linee date a, b.*

Siano x ed y le due rette cercate; dobbiamo avere, dalla esposizione; la progressione geometrica

$\div a:x:y:b$, o piuttosto, $a:x::x:y$, ed $x:y::y:b$;

d' onde deduconsi le $\begin{cases} x^2 = ay \;.\;.\;.\;.\;.\; (1) \\ y^2 = bx \;.\;.\;.\;.\;.\; (2) \end{cases}$

Portando nella 2ª equazione il valore di y dedotto dalla 1.ª, e viceversa, otterremo successivamente per le equazioni finali

$$x(x^3-a^2b)=0, \quad y(y^3-ab^2)=0;$$

e perciò, per sistema dei valori di x e di y,

$$(x=0, \text{ ed } y=0), \; (x=\sqrt[3]{a^2b}, \text{ ed } y=\sqrt[3]{ab^2}).$$

Il primo sistema ($x=0$, $y=0$) benchè verifichi l' equazioni (1) e (2), pure non significa nulla riguardo all' esposizione. In quanto al secondo, questo rappresenta ad evidenza i valori aritmetici delle due *medie proporzionali*; poichè, la ragione della progressione essendo (t.° 1.° p. 165)

$q=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ avremo per i due termini cercati

$$x=a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}=\sqrt[3]{a^2b}\,,\ y=a\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^2=\sqrt[3]{ab^2}.$$

Ma qui si tratta di rappresentare con linee queste due medie proporzionali; e perciò, tutto si riduce a costruire le equazioni (1) e (2), la prima delle quali rappresenta una parabola LAL' (fig. 161) che ha per parametro a ed il suo primo asse è diretto secondo l' asse delle y; la seconda è pur anche una parabola NAN', avente b per parametro, e l' asse principale diretto secondo l' asse delle x.

Queste due parabole passano ambedue per l'origine che corrisponde alla soluzione ($x=o$, $y=o$), e s' incontrano in un secondo punto M, le di cui coordinate AP, PM altro non sono che *le linee richieste.*

Dalla posizione rispettiva di queste due curve si scorge che esse non possono avere che questi due punti comuni; ed infatti, le equazioni a due termini $x^3-a^2b=o$, $y^3-ab^2=o$, non ammettono che *una sola radice reale.*

Dall' addizionare le equazioni (1) e (2) avremo

$$x^2+y^2-ay-bx=o;$$

equazione di una circonferenza di cerchio, la di cui costruzione può sostituirsi a quella di una delle due curve. Essa ha per coordinate del suo centro, $\frac{a}{2}$, e $\frac{b}{2}$; di più, passa per l'origine; e perciò la sua costruzione non presenta alcuna difficoltà.

Sia, per un caso particolare, $b=2a$; l' equazione

$x^3-a^2b=o$, diviene $x^3-2a^3=o$, o $x^3=2a^3$;

e può riguardarsi come la traduzione algebrica del seguente problema.

Trovare un cubo duplo di un' altro il di cui lato a è dato.

Costruendo, come nel caso generale, le equazioni $x^2=ay$, $y^2=2ax$ (fig. 162), (una delle quali può prender la forma di $y^2+x^2-ay-2ax=o$), e supponendo che sia AB$=a$, otterremo AP per il lato cercato.

N. B. La soluzione dei problemi, sulla *trisezione dell' angolo*, e sulla *duplicazione del* cubo, ha occupato in vano anche gli antichi geometri che hanno cercato una costruzione puramente *geometrica*; cioè una costruzione in cui non si faccia uso che della linea retta e del cerchio. Tutte le altre costruzioni ove s' introducono le sezioni coniche, o altre curve si denominano costruzioni *meccaniche*; perchè, in generale queste curve si determinano prima con de' punti, e poi si delineano a mano, oppure si descrivono colla norma di qualche regola.

Determinazione del numero delle radici reali di una equazione numerica mediante le intersecazioni delle curve.

270. Un' equazione numerica ad una sola incognita, che ci venga data, se si riguardi come il risultato dell' eliminazione fra due equazioni a due incognite, e se si costruiscano queste due primitive equazioni, già sappiamo che le ascisse dei punti d' intersecazione dei loro luoghi geometrici esprimono in *linee* le radici reali della proposta.

Dunque determinando, con il processo già conosciuto in Geometria, il rapporto di ciascuna di queste ascisse con l' *unità lineare*, si otterrebbero approssimativamente i valori numerici delle radici. Ma questo metodo è assai difettoso; attesochè l' esattezza dei risultati dipende dal grado di perfezione dell' istromento di cui uno si serve, e dalla destrezza di chi opera.

Tuttavia, potremo far uso con profitto di queste

sorti di costruzioni, per riconoscere *il numero delle radici reali* di una equazione numerica, senza esser costretti di ricorrere all' equazione delle differenze la di cui determinazione, come si sà, richiede calcoli moltissimo complicati.

E siccome non conosciamo alcun' opera moderna ove quest' idea sia stata sviluppata, crediamo perciò di dovere introdurci in alcuni dettagli su tal soggetto.

271. Prendiamo, per 1.° *esempio* l' equazione

di 3.° gr.° $x^3-6x-7=o$. . . . . . (1);

dal fare $x^2=2y$. . . . . (2),

otterremo $2xy-6x-7=o$. . . . . (3).

Dalla costruzione di queste due equazioni rapporto ai medesimi assi AX, AY; (fig. 163) risulterà: 1.° una parabola LAL' che ha per parametro 2, e il di cui primo asse è diretto secondo l' asse delle y: 2.° un' iperbole (AMG', FCF') che ha per assintoti ($y=3$, $x=o$), e passa per il punto C,

dal quale si ottiene $y=o$, $x=-\frac{7}{6}$.

Ora è evidente che queste due curve non s' incontrano che in un sol punto M, la di cui ascissa AP è compresa fra 2 e 3.

N. B. Quest' equazione è stata trattata (t. 4.° § 37) e siccome non si ottenne che *un* solo cangiamento di segno, perciò ci trovammo in allora nella necessitè di formare l' equazione delle differenze, per assicurarci se esistesse più di una radice reale. Ma la costruzione precedente dimostra immediatamente che in realtà non vi è che una sola radice reale.

Serva di 2.° *esempio* l' equazione di 4.° grado

$$x^4-2x^2+8x-3=o. \;. \;. \;. \;. \;. \;(1)$$

per la quale, dalla sostituzione dei numeri interi

consecutivi, non si ottengono che due cangiamenti di segno.

Facciamo $x^2=y$. . . . . (2),

d'onde $y^2-2y+8x-3=0$,

e addizionando queste due ultime equazioni,

$$y^2+x^2-3y+8x-3=0. \; . \; . \; . \; (3).$$

Dalla costruzione delle equazioni (2) e (3) sopra li stessi assi, otteniamo: 1.° la parabola LAL' (fig. 164) che ha 1 per parametro: 2.° una circonferenza di cerchio AMM'G', il di cui centro ha per coordinate ($x=-4$, $y=\frac{3}{2}$ ed il raggio è

$$=\sqrt{(16+\frac{9}{4}+3)}=\frac{1}{2}\sqrt{85}=4,6. \; . \; . \; . \; .$$

Ma queste due curve non hanno evidentemente che due punti comuni M, M', le di cui ascisse AP, AP' sono comprese, l'una fra o ed 1, l'altra fra -2 e -3.

Infatti l'equazione (1) è stata formata dalla moltiplicazione dei due fattori x^2+2x+3, x^2+2x-1, il primo de' quali, eguagliato a o, dà luogo a radici imaginarie; ed il secondo ci dà $x=-1\pm\sqrt{2}$.

Prendiamo per 3.° *esempio* l'equazione

$$8x^3-6x-1=0. \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Sia $x^2=y$. . . . . . . (2),

diverrà la (1) $8xy-6x-1=0$. . . . (3).

La costruzione dei luoghi geometrici espressi da queste due equazioni non presenta difficoltà alcuna. Ottiensi la parabola LAL' (fig. 167) e l'iperbole (GMG', HqH') che ha per assintoti l'asse

delle y, e poi una retta BE parallela all' asse delle x, e guidata ad una distanza $AB = \frac{3}{4}$; di più questa curva passa per il punto q, per il quale abbiamo $y = o$, $x = -\frac{1}{6}$.

Dalla situazione rispettiva di queste due curve risulta chiaramente che i rami AML, GMG' hanno un punto comune M la di cui ascissa è positiva.

In quanto agli altri rami AmL', HmH', il loro avvicinamento nella parte prossima all' origine A può dar luogo a qualche dubbio sopra il numero dei loro punti d' intersecazione; ma ecco un mezzo per far cessare ogni incertezza.

Moltiplichiamo l' equazione $8x^3 - 6x - 1 = o$, per x; ed avremo l' equazione di quarto grado

$$8x^4 - 6x^2 - x = o \ldots (1),$$

($x = o$ sarà una radice estranea al quesito).

Facendo di nuovo $x^2 = y$, ne dedurremo la

$$8y^2 - 6y - x = o,$$

equazione di una seconda iperbole il di cui primo asse è parallelo all' asse delle x, ed è situato in una distanza $AI = \frac{3}{8}$, attesa l' equazione data

$$y = \frac{3}{8} \pm \frac{1}{8} \sqrt{(8x + 9)}.$$

Si vede, inoltre, che il vertice D ha per ascissa $x = -\frac{9}{8}$, dedotta da $8x + 9 = o$, e che la curva passa per l' origine A, e perciò per il punto B, dal quale abbiamo

$$AB = \frac{3}{4} = 2 . AI.$$

Ora, è evidente che la parabola KDK′ incontra la prima parabola LAL′ in due punti *m*, M; e poichè l'equazione $8x^3 - 6x - 1 = o$, ha già due radici reali; conviene necessariamente che ne abbia una terza corrispondente ad un punto *n* situato alquanto a sinistra del punto A, e sopra l'asse delle *x*.

La costruzione della terza curva presenta un'altro vantaggio, quello cioè di determinare, in un modo più preciso, i punti cercati, poichè devono questi trovarsi negl' incontri delle tre curve; ma non dobbiamo ricorrerci se non quando cada dell'incertezza sulle intersecazioni.

N. B. Tutte le volte che la proposta racchiuda radici eguali, verremo ad esserne avvertiti dal *contatto delle curve*, in uno o più punti; ciò che ci fa supporre che siano state descritte con bastante esattezza. Ma si sa che i metodi d' approssimazione dell' analisi non possono applicarsi ad una equazione di tale specie, e che convien sempre incominciare col ridurre la sua risoluzione a quella di un'altra equazione che abbia tutte le radici diverse.

372. I principj ora esposti per determinare il numero delle radici reali di una equazione numerica di terzo grado, o di quarto, sono anche applicabili alle equazioni di grado superiore; ma siamo condotti allora a costruzioni un poco più complicate.

Sia, *per esempio*, l'equazione di 5.° grado.

$$x^5 - 3x^2 + 2x - 4 = o \;.\;.\;.\; (1).$$

Facciamo anchè qui $x^2 = y$ . . . . (2),
e la (1) diverrà $y^2x - 3y + 2x - 4 = o$ . . . (3).

Dopo di aver costruita la parabola LAL′, rappresentata dalla (2), dedurremo dall' equazione (3)

$$y=\frac{3}{2x}\pm\frac{1}{2x}\sqrt{(-8x^2+16x+9)}\ .\ :\ .\ (4);$$

e, facendo $-8x^2+16x+9=o$, ó $x^2-2x=\frac{9}{8}$,

otterremo per x due valori $x=2,4$, ed $x=-o,4$ prossimi di o, 1, i quali (§ 232) rappresentano i limiti della curva, nel senso delle x *positive* e delle x *negative*; cioè, se si prendono sopra AX due parti $AD=2,4$, $AD'=-o,4$, (fig. 168), la curva resta compresa del tutto fra le parallele DG, D'G'.

Ad oggetto di ottenere i punti ove la curva tocca i suoi due limiti, basta introdurre, nella parte razionale della espressione (4), i valori $x=2,4$ ed $x=-o,4$; ciò che ci dà

$$y=\frac{3}{4,8}=\frac{30}{48}=\frac{5}{8}=DE,\ y=-\frac{3}{o,8}=-\frac{15}{4}=D'E'.$$

Diamo adesso ad x valori intermediari.

Sia prima $x=o$; e la (4) diviene $y=\frac{3\pm3}{o}$,

onde $y=\infty$, $y=\frac{o}{o}$

Per sapere cosa significhi l'ultimo risultato, riprendiamo la (3); e facciamovi $x=o$; e ne dedurremo $y=-\frac{4}{3}$.

Si vede di quì che la curva incontra l' asse delle y ad una distanza $AH=-\frac{4}{3}$.

In quanto al risultato $y=\infty$, convien supporre che lo stesso asse serva di assintoto alla curva che

si sà essere indefinita nel senso delle y, poichè l'equazione (3) è di primo grado in x. Ed infatti, dal risolvere questa equazione riguardo ad x, otteniamo

$$x=\frac{3y+4}{y+2}=\frac{3}{y}+\frac{4}{y^2}+\text{ecc.};$$

valore che riducesi a o, supponendo y positivo e negativo, ma maggiore di qualunque altro numero dato.

Sia adesso $x=1$; l'equazione (4) ci darà

$$y=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{17}.$$

approssimativamente, $y=3\frac{1}{2}$ ed $y=-\frac{1}{2}$;

ciò che ci dà BN a BN′ per due coordinate della curva.

Sia ancora $x=2$, otterremo $y=\frac{3}{2}$, ed $y=o$.

Perciò passa la curva per i punti C e C′ che ci danno $CC'=\frac{3}{2}$.

Bastano i punti ora determinati per dare un' idea del corso della curva corrispondente alla equazione (3), venendo esattamente rappresentata da E′HN′CEC′N . . . .

L' inferior parte bensì CN′HE′ . . . non merita alcun riguardo per l'oggetto che ci proponiamo. Inquanto poi alla parte superiore CEC′N . . , si vede che essa non può avere che un sol punto comune con la parabola LAL′; e che, avendo questo punto M un' ascissa compresa fra 1 e 2, perciò la (1) non ha che *una sola radice reale positiva*.

Non ha poi radici reali *negative*, perchè la

$x = \frac{3y+4}{y^2+2}$ ci fa conoscere che ai valori positivi di y corrispondono sempre valori positivi di x. Cosichè la seconda curva non può incontrare la prima nell' angolo YAX'.

Osserveremo ancora che, attesa la forma indicata per la seconda curva, una linea retta non può incontrarla che al più in *tre* punti; come dev' essere, poichè la sua equazione è di terzo grado.

Concluderemo da ciò che precede che l' equazione proposta non ha che *una sola radice reale*.

273. Serva per altro esempio l'equazione di 6. gr°.

$$x^6-2x^4+2x^3+3x^2-x-2=0 \quad . \; . \; . \; (1),$$

ove, invece di fare $x^2=y$ per ottenere un equazione di 3.° grado in x ed y che non cesserebbe di essere difficile a costruirsi, potremo fare

$$x^3=y \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2),$$

e l' equazione (1) diverrà

$$y^2-2xy+2y+3x^2-x-2=0 \quad . \; . \; . \; (3).$$

Il luogo geometrico della (2) è una curva di 3.° grado; ma di semplicissima costruzione.

Osserveremo prima che, avendo i valori di x e di y necessariamente lo stesso segno (fig. 167), attesa la natura della equazione la curva deve estendersi infinitamente a destra dell' asse della y, ma sopra l' asse delle x; poi a sinistra dell' asse delle y, ma sotto l' asse delle x.

In oltre, poichè la sostituzione di $-x$, $-y$ invece di $+x$, $+y$, non cangia l'equazione, ne siegue (§ 245) che l' origine delle coordinate (che trovasi sopra la curva, poichè $x=0$, $y=0$, verificano l' equazione) sia nel tempo stesso il centro di questa curva.

Si può anche, col risolvere il problema delle

tangenti con il metodo generale esposto n. 262, riconoscere che l' asse delle x è una tangente nel punto A; ma ciò non si richiede dal nostro scopo. Per potere adesso delineare la curva, basterà dare ad x qualche valore o positivo o negativo.

Per $x=\pm\frac{1}{2}$, si trova $y=\pm\frac{1}{8}$,

$x=\pm1$, ... $y=\pm1$,

$x=\pm\frac{3}{2}$, ... $y=\pm\frac{27}{8}=\pm3\frac{3}{8}$,

$x=\pm2$, ... $y=\pm8$,

Passa dunque la curva per i punti (N, n), (N', n'), (N", n''), . . . , ed ha la forma $n''\,n'\,n$ A N N' N" . . .

Si scorge ancora, dalla natura dei valori di y corrispondenti ai valori di x, che la curva, partendo da $x=1$, s' innalza rapidamente sopra l'asse delle x.

Occupiamoci adesso della equazione (3). Risolvendola riguardo ad y, troveremo

$$y=x-1\pm\sqrt{(-2x^2-x+3)};$$

d' onde siegue che la curva è un' ellisse, che ha per uno de' suoi diametri, $y'=x-1$, o DD'.

I suoi limiti dedotti da $-2x^2-x+3=0$, onde $x=1$, $x=-\frac{3}{2}$, sono rappresentati da DL, C'D',

e dopo di aver determinato i suoi punti d' intersecazione con gli assi, come anche il diametro II', conjugato del diametro DD', come si è veduto (§§ 231, 233), si ottiene la curva DID'I'D, che non ha evidentemente che *due* punti comuni con la prima curva.

E perciò, l' equazione proposta non ha che *due* ra-

dici reali, una *positiva* e compresa fra o ed 1, *negativa* l'altra e compresa fra $-o$ e -2.

Potrà servire di esercizio la $x^5-4x^3+5x-b=o$ (fig. 170); facendo $x^2=y$, onde

$$y^2x-4yx+5x-b=o\ ,$$

si verrebbe a conoscere che l'equazione non ha anche qui che una radice reale.

Non ci tratteremo di più sopra questo metodo di discoprire il *numero* delle radici reali di una equazione numerica, metodo che ci sembra preferibile a quello della formazione delle equazioni delle differenze, poichè si applica facilmente a qualunque equazione che non sorpassi il quarto grado; mentre che la determinazione delle equazioni delle differenze, anche per un'equazione di quarto grado, c'involge in calcoli quasi impraticabili.

275. *Osservazione.* L'equazione $y=x^3$, addotta nel precedente esempio, è un caso particolare della

$$y=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+\ .\ .\ ,$$ la quale, costruita con tutti i valori che possono attribuirsi alle costanti a, b, c, d, . . . , e secondo il rango o grado del termine nel quale si fa arrestare il secondo membro di questa equazione, ci presenta due luoghi geometrici noti con il nome di *curve paraboliche*.

Non prendendo che i soli tre primi termini del secondo membro, avremo l'equazione

$$y=a+bx+cx^2.$$

che appartiene alla parabela ordinaria; i suoi ass principali sono paralleli agli assi coordinati (supposti rettangolari).

L'equazione $y=a+bx+cx^2+dx^3$, ci dà le *parabole di terzo grado*; cosichè, il luogo geometrico dell'equazione $y=x^3$, è una specie particolare di *parabola cubica*; e così in seguito.

I Geometri si sono ancora approfittati della costruzione di queste curve, e per determinare approssimativamente le radici delle equazioni numerica ad una sola incognita, e per ispegare i fondamenti principali della loro risoluzione. Ma i limiti richiesti da questo trattato, già a bastanza esteso, non ci permettono di introdurci in questi nuovi dettagli, che si trovano altronde assai bene esposti nell' Algebra di Garnie (2°. volume).

INDICE

CAP. I.

Dei punti, della linea retta e del cerchio.

CAP. II.

Curve di secondo grado.

CAP. III.

Proprietà principali delle sezioni coniche

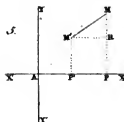
Della parabola.

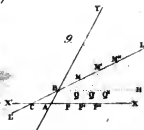
Equazioni polari delle tre curve di 2.° gr.

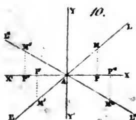
CAP. IV.

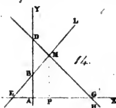
Discussione dell' equazione generale di 2.° gr.°. Determinazione del centro e degli assi. Considerazioni generali sulle sezioni coniche. Applicazioni di questi principj.

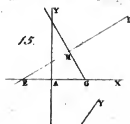


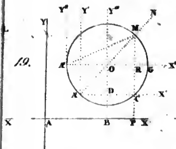


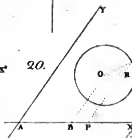








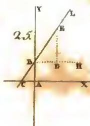


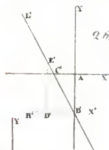


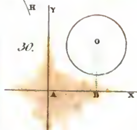
Raff. d'Angelo inc.

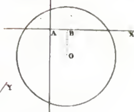




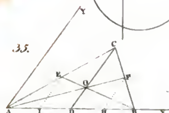


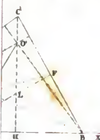


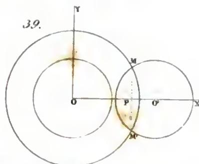






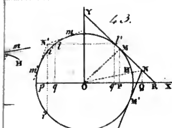


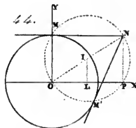


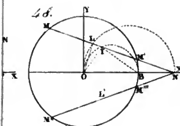


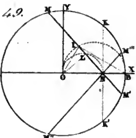
Raff. d'Angelo inc.

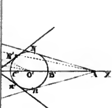


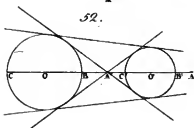


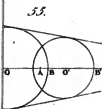


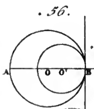


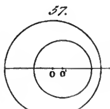






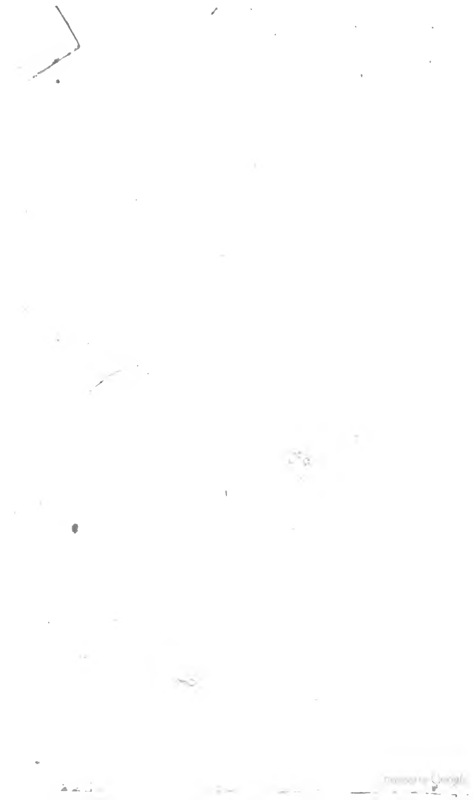




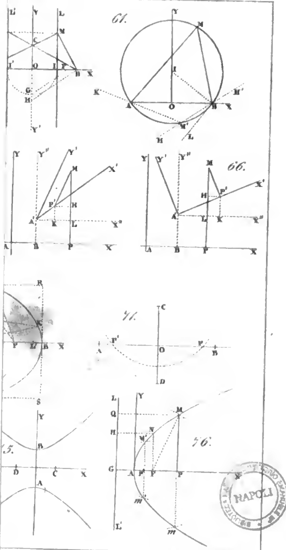


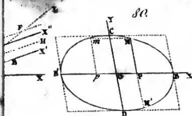
Raff. d'Angelo inc.

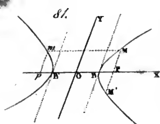


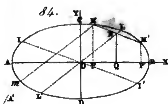


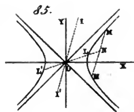
IV.



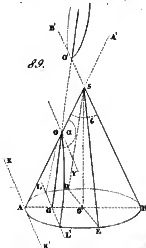


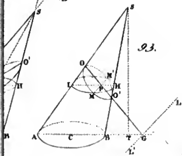






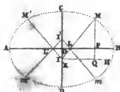


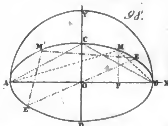


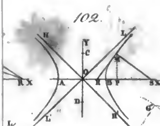


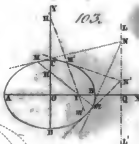


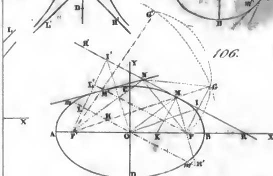
Raff. d'Angelo incise

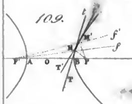


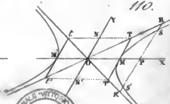












Raff. d'Angelo inc.



114. 115. 119. 120. 124. 125. 129. 130.

Raff. d'Angelo inc.



133.

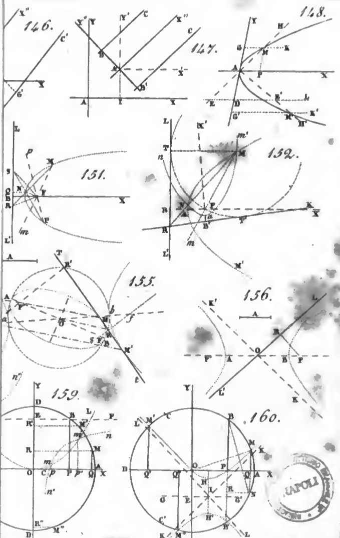
134.

138.

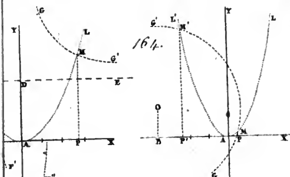
139.

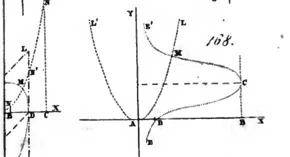
143.

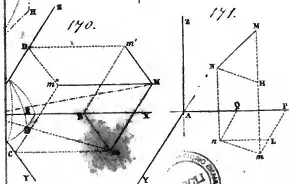
Raff. d'Angelo inc.



Raff. d' Angelo inc.







Raff d'Angelo inc.

